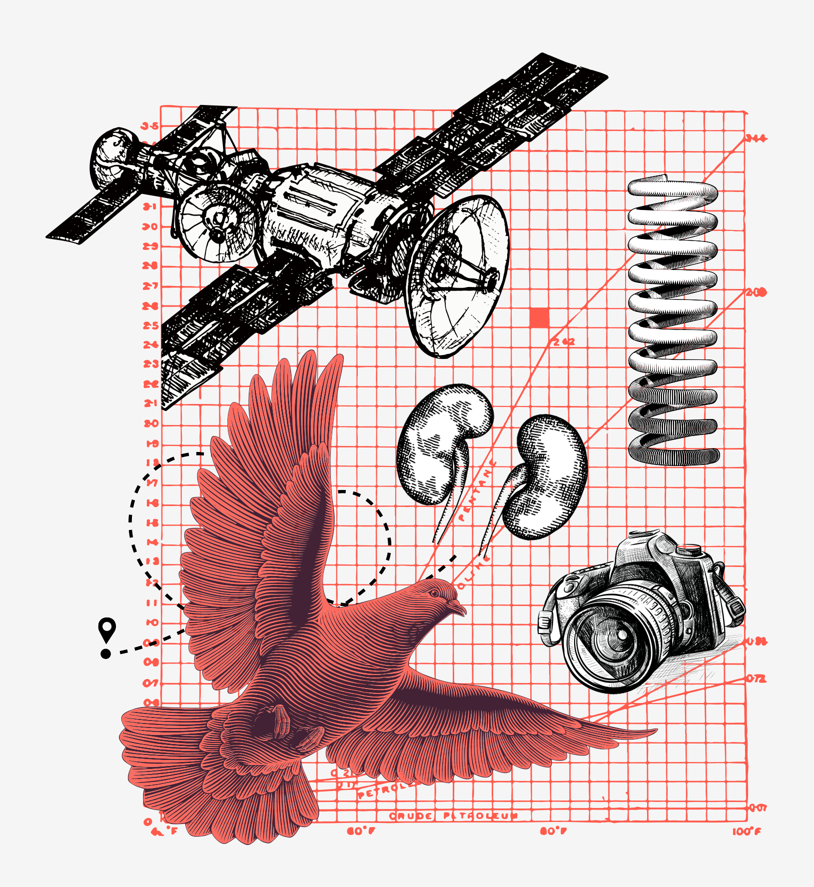
إيان ستيوارت

ما الفائدة؟

الفعالية اللامعقولة للرياضيات



ترجمة محمد يحيي

ما الفائدة؟

الفعالية اللامعقولة للرياضيات

تأليف
إيان ستيوارت

ترجمة
محمد يحيى

مراجعة
مصطفى محمد فؤاد



ما الفائدة؟

إيان ستيوارت

What's the Use?

Ian Stewart

الناشر مؤسسة هنداوي
المشهرة برقم ١٠٥٨٥٩٧٠ بتاريخ ٢٦ / ١ / ٢٠١٧

يورك هاوس، شييت ستريت، وندسور، SL4 1DD، المملكة المتحدة
تليفون: ٨٣٢٥٢٢ ١٧٥٣ (٠) ٤٤ +
البريد الإلكتروني: hindawi@hindawi.org
الموقع الإلكتروني: https://www.hindawi.org

تصميم الغلاف: ولاء الشاهد

الترقيم الدولي: ٩٧٨ ١ ٥٢٧٣ ٣٥٩٨ ١

صدر الكتاب الأصلي باللغة الإنجليزية عام ٢٠٢١.
صدرت هذه الترجمة عن مؤسسة هنداوي عام ٢٠٢٤.

المحتويات

الفصل الأول

الفعالية اللامعقولة

إن المعجزة المتمثلة في ملاءمة لغة الرياضيات لصياغة قوانين الفيزياء لهي هبةٌ مدهشة لا نفهمها ولا نستحقها. إننا يجب أن نكون مُمتنِّين من أجلها، ونأمل أن تظل صالحة للاستخدام في الأبحاث المستقبلية، وأن تمتد — بغض النظر عن النتيجة، وسواء تسبَّب هذا في سعادتنا أو أضاف إلى حيرتنا — إلى فروعٍ عديدة من العلم.

يوجين فيجنر،
كتاب «الفعالية اللامعقولة للرياضيات في العلوم الطبيعية»

ما فائدة الرياضيات؟

ما الذي تفعله من «أجلنا» في حياتنا اليومية؟

منذ زمن ليس ببعيد، كانت هناك إجابات سهلة على هذين السؤالين. إن الإنسان العادي كان يستخدم العمليات الحسابية الأساسية طوال الوقت، حتى لو كان فقط للتحقُّق من قيمة الفواتير عند التسوُّق. فكان يحتاج النجَّارون إلى معرفة المبادئ الأولية لعلم الهندسة. كما كان يحتاج المسَّاحون والملَّاحون إلى معرفة علم حساب المثلثات. وكان يتطلب العمل في المجالات الهندسية خبرةً في علم حساب التفاضُل والتكامُل.

أما اليوم، فالأمور مختلفة. إذ تؤدي ماكينات الحسابات في المراكز التجارية مهمةَ حساب القيمة الإجمالية للفواتير، وتُحدد قيمة العروض الخاصة، وتضيف قيمة ضريبة المبيعات. ونحن نسمع أصوات التنبيه أثناء مسح الليزر لرموز الباركود على كل سلعة، وما دامت الأصوات تتطابق مع السلع، فإننا نفترض أن الأجهزة الإلكترونية تعرف ما تفعله. ولا يزال العديد من المهن يحتاج إلى معرفة رياضية واسعة النطاق، ولكن حتى في تلك

الحالة، فنحن نعهد بمهمة إجراء معظم العمليات الرياضية المطلوبة إلى أجهزة إلكترونية ذات خوارزميات مُدمَجة.

إن الرياضيات، التي هي مجال بحثي، غير مُقدرة في الوقت الحاضر مع زيادة معدل الأَتْمَتَة. لكنها أساسية جدًّا لأنشطة حياتنا اليومية على نحو لا يمكن إنكاره.

سيصبح من السهل استنتاج أن الرياضيات قد عفا عليها الزمن، ولم تعُد تُستخدم، لكن هذا الرأي خطأ. فمن دون الرياضيات سينهار عالم اليوم. ومن أجل إثبات هذا، سأعرض عليكم تطبيقات لها في السياسة، والقانون، وعمليات زرع الكُلى، وخدمة توصيل الطلبات من المراكز التجارية، وأمن الإنترنت، والمؤثرات الخاصة في الأفلام السينمائية، وصناعة الزُّنبُرُكات. سنرى كيف تلعب الرياضيات دورًا أساسيًّا في أجهزة الأشعة الطبية، والتصوير الرقمي، وشبكات الألياف الضوئية، والمِلاحة عبر الأقمار الصناعية. وسنعرف كيف تساعدنا في التنبؤ بآثار تغيُّر المناخ، وكيف يمكن أن تحمينا من الإرهابيين وقراصنة الإنترنت.

اللافت للنظر أن العديد من هذه التطبيقات تعتمد على مفاهيم رياضية نشأت لأسباب مختلفة تمامًا، غالبًا ما تتمثَّل في لذَّة الاستكشاف العقلي. فأثناء مرحلة البحث والإعداد لهذا الكتاب فوجئت أكثر من مرة عندما صادفت استخدامات للرياضيات لم أحلم قط أنها موجودة. وهذه الاستخدامات تعتمد على أشياء لم أكن أتوقع أن لها تطبيقاتٍ عمليةً بالفعل، مثل مُنحنيات ملء الفراغ، والكواترنيونات، والطوبولوجيا.

إن الرياضيات هي منظومة من الأفكار والأساليب، لا حدود لها، وتتَّسم بالابتكار الشديد. وهي تقبع تحت سطح التقنيات التحويلية، التي تجعل القرن الحادي والعشرين مختلفًا تمامًا عن أي عصر سابق، مثل ألعاب الفيديو، والطيران الدولي، والاتصالات عبر الأقمار الصناعية، وأجهزة الكمبيوتر، وشبكة الإنترنت، والهواتف المحمولة.[1] اخدش بأظافرك شاشة هاتف «آي فون»، وسترى البريق المشرق للرياضيات.

من فضلك لا تفعل ذلك حرفيًّا.

هناك ميلٌ إلى افتراض أن أجهزة الكمبيوتر، بقُدراتها التي تقترب من الإعجاز، تجعل من علماء الرياضيات — وفي الواقع الرياضيات نفسها — أمرًا قد عفا عليه الزمن. لكن أجهزة الكمبيوتر لا تحل محل علماء الرياضيات مثلما لا تحل الميكروسكوبات محل علماء البيولوجيا. تعمل أجهزة الكمبيوتر على تغيير الطريقة التي نُجري بها العمليات

الرياضية، لكنها في الغالب تريحنا من الجوانب المملَّة والمرهِقة منها. إنها تمنحنا وقتًا للتفكير، وتساعدنا في البحث عن الأنماط، وتضيف سلاحًا جديدًا قويًّا للمساعدة في تعزيز علم الرياضيات على نحو أسرع وأكثر فعالية.

في الواقع، هناك سبب رئيسي أدَّى إلى تزايد أهمية الرياضيات أكثر من أي وقت مضى، وهو انتشار أجهزة الكمبيوتر العالية الإمكانيات الرخيصة. لقد وفَّر انتشارها فُرصًا جديدة لاستخدام الرياضيات في المسائل الخاصة بالعالم الحقيقي. وأصبحت الأساليب التي كانت قبل ذلك غير قابلة للتطبيق، لأنها تحتاج إلى الكثير من العمليات الحسابية، مطبَّقةً على نحو روتيني. إن أعظم علماء الرياضيات في زمن الحساب باستخدام القلم الرصاص والورق كان سيرفع يديه في يأس واستسلام عند محاولة تطبيق أسلوبٍ يتطلب إجراء عدد هائل من العمليات الحسابية. أما اليوم، فنحن نستخدم مثل هذه الأساليب على نحو روتيني؛ لأن لدينا تقنية يمكنها إجراء العمليات الحسابية في جزء من الثانية.

ولا يفوتني هنا أن أضيف أنه لطالما كان علماء الرياضيات في طليعة ثورة الكمبيوتر، هذا إلى جانب عددٍ لا يُحصى من المهن الأخرى. تذكَّر جورج بول، الذي كان رائدًا في المنطق الرمزي، الذي يشكل أساس معمارية الكمبيوتر الحالية. تذكَّر أيضًا آلان تورينج، وآلة تورينج الشاملة الخاصة به، وهي نظام رياضي يمكنه حساب أي شيء قابل للحساب. تذكَّر الخوارزمي، الذي أكد في كتابه عن علم الجبر عام ٨٢٠ ميلاديًّا على دور الإجراءات الحسابية المنهجية، التي سُميت في زمننا الحالي على اسمه، «الخوارزميات».

تعتمد معظم الخوارزميات التي تمنح أجهزة الكمبيوتر قدراتها المثيرة للإعجاب على الرياضيات بشكل راسخ. وقد أُخذ العديد من التقنيات ذات الصلة من «على الرف» في المتجر الحالي للأفكار الرياضية، مثل خوارزمية «بيدج رانك» الخاصة بشركة جوجل، التي تحدد مدى أهمية أي موقع على شبكة الويب، والتي أسست صناعة تُقدر قيمتها بمليارات الدولارات. حتى أروع خوارزميات التعلُّم العميق في الذكاء الاصطناعي تستخدم مفاهيم رياضية مجرَّبة ومختبَرة، مثل المصفوفات والرسوم البيانية المرجحة. وتتضمن أي مهمة عادية للغاية، مثل البحث في مستند عن سلسلة معينة من الحروف، في إحدى الطرق الشائعة على الأقل، أداةً رياضية تُسمى آلة محدودة الحالة.

تميل إسهامات الرياضيات في هذه التطورات المثيرة إلى أن تصبح في طي النسيان. لذا في المرة القادمة، عندما تسلط وسائلُ الإعلام الضوء على إحدى القدرات الجديدة الإعجازية لأجهزة الكمبيوتر، ضع في اعتبارك أن وراء ظهورها هناك الكثير من العمليات الرياضية،

والكثير كذلك من العمل الهندسي، والفيزيائي، والكيميائي، والنفسي، وأنه دون دعمِ هذا الفريق الخفِي من المساعدين، لن يتمكَّن ذلك النَّجم الرقمي من التبختُر تحت دائرة الضوء.

الرياضيات في عالمنا اليوم يُبخَس حقُّها بكل سهولة؛ وذلك لأن كل العمليات الرياضية تقريبًا تُجرى خلف الكواليس. سر في أحد شوارع أي مدينة، وسيُداهم عينيك طوفان من اللافتات الإعلانية التي تعلن عن الأهمية اليومية للبنوك، ومتاجر بيع الخضراوات، والمراكز التجارية، ومتاجر الملابس، ووِرَش إصلاح السيارات، ومكاتب المحاماة، ومطاعم الوجبات السريعة، ومعارض بيع التحف، والجمعيات الخيرية، وغيرها من الأنشطة والمهن المتعددة الأخرى. لكنك لن تجد لوحة نحاسية تعلن عن مكتب لعالِم رياضيات استشاري. كما أنك لن تجد أن الرياضيات قد عُبِّئت في مُعلبات يمكن شراؤها من المراكز التجارية.

ورغم ذلك، عند التعمُّق في البحث قليلًا، سرعان ما ستصبح أهمية الرياضيات واضحة. فالمعادلات الرياضية للديناميكا الهوائية مهمَّة على نحو حيوي بالنسبة لتصميم الطائرات. كما تعتمد عمليات المِلاحة على حساب المثلثات. صحيح أن الطريقة التي نستخدم بها هذا العلم اليوم تختلف عن الطريقة التي استخدمها كريستوفر كولومبوس؛ لأن الأجهزة الإلكترونية للمِلاحة أصبحت هي ما تُجري العمليات الرياضية بدلًا من القلم، والحبر، وجداول الملاحة، لكن المبادئ الأساسية متشابهة إلى حد كبير. ويعتمد تطوير الأدوية الجديدة على علم الإحصاء للتأكد من أن الأدوية آمنة وفعَّالة. وتعتمد عمليات الاتصالات عبر الأقمار الصناعية على فهمٍ عميق لعلم الديناميكا المَدارية. ويتطلب التنبؤ بالطقس حل المعادلات المتعلقة بكيفية تحرك الغلاف الجوي، ومقدار الرطوبة، ومدى الدفء أو البرودة الخاصَّين به، وكيف تتفاعل كل هذه الخصائص معًا. وهناك الآلاف من الأمثلة الأخرى. ونحن لا نلاحظ أن تلك الأمثلة تتضمن عمليات رياضية؛ لأننا لسنا في حاجة لمعرفة هذه الحقيقة كي نتمكن من الاستفادة من النتائج.

السؤال الآن هو: ما الذي يجعل الرياضيات مفيدة للغاية، في مثل هذه المجموعة الواسعة من الأنشطة البشرية؟

إنه ليس سؤالًا جديدًا. في عام ١٩٥٩، ألقى عالم الفيزياء يوجين فيجنر محاضرة مهمة في جامعة نيويورك،[2] حملت عنوان «الفعالية اللامعقولة للرياضيات في العلوم الطبيعية». وركَّز فيها على العلوم، ولكن كان من الممكن أيضًا إثبات الفعالية اللامعقولة للرياضيات في الزراعة، والطب، والسياسة، والرياضة، وأي مجال آخر. وقد أعرب فيجنر نفسه عن أمله في أن تمتدَّ هذه الفعالية إلى «فروع عديدة من العلم». وقد امتدت بالفعل.

إن الكلمة الرئيسية في العنوان الذي اختاره لمحاضرته جديرة بالملاحظة، لأنها بمنزلة مفاجأة: «اللامعقولة». فمعظم استخدامات الرياضيات معقولة تمامًا، بمجرد معرفة الأساليب التي تُستخدَم في حل مسألة مهمة أو اختراع أداةٍ مفيدة. من المعقول تمامًا، على سبيل المثال، أن يستخدم المهندسون معادلات الديناميكا الهوائية لتساعدهم على تصميم الطائرات. هذا هو السبب الذي من أجله ظهر علم الديناميكا الهوائية في المقام الأول. كما ظهر الكثير من الجوانب الرياضية المستخدمة في التنبؤ بالطقس مع وضع هذا الغرض في الاعتبار. وظهر علم الإحصاء من اكتشاف أنماط واسعة النطاق في البيانات المتعلقة بالسلوك البشري. وقدر العمليات الرياضية، اللازم لتصميم النظارات ذات العدسات متغيِّرة البُعد البُؤري، هو قدر هائل، ولكن طُوِّر معظمها بهدف خدمة مجال البصريات.

إن قدرة الرياضيات على حل المشكلات المهمة تصبح لا معقولة، من وجهة نظر فيجنر، عندما لا توجد مثل هذه الصلة بين الدافع الأصلي لتطوير المبادئ الرياضية، والاستخدام النهائي. وقد بدأ فيجنر محاضرته بقصة، سأُعيد صياغتها وأُنمِّقها قليلًا.

التقى رجلان كانا فيما مضى زميلين في الفصل نفسه بالمدرسة. عرض أحدهما، وهو اختصاصي إحصاء يعمل على اتجاهات النمو السكاني، على زميله إحدى أوراقه البحثية، التي تبدأ بصيغة رياضية معتادة تُستخدم في الإحصاء، وهي صيغة التوزيع الطبيعي أو «منحنى الجرس».[3] وشرح له بعض الرموز — هذا يشير لعدد السكان، وهذا لمتوسط العينة — وكيف يمكن استخدام الصيغة لاستنتاج عدد السكان دون الحاجة إلى استخدام طريقة العَدِّ التقليدية، المتمثلة في عد جميع السكان. فظن زميله أنه يمزح، لكنه لم يكن متأكدًا تمامًا، لذا سأل عن الرموز الأخرى. في نهاية المطاف وصل إلى الرمز الذي بدا هكذا: π.

«ما هذا الرمز؟ إنه يبدو مألوفًا.»

«أجل، إنه رمز «الباي» أو «ط»، ويعبر عن نسبة مُحيط الدائرة إلى قُطرها.»

قال الزميل: «الآن أعلم أنك تحاول خداعي. عجبًا، ما العلاقة بين الدائرة وتعداد السكان؟!»

النقطة الأولى حول هذه القصة هي أن شكوك الصديق كانت معقولة تمامًا. يدلُّنا التفكير السليم أن مفهومين متباينين مثل هذين لا يمكن أن تكون هناك صلة بينهما. فأحدهما له علاقة بعلم الهندسة، والآخر له علاقة بتعداد السكان. النقطة الثانية هي أنه على الرغم من التفكير السليم، هناك صلة بينهما. إن منحنى الجرس له صيغة رياضية، وهي تتضمن العدد π. إنه ليس مجرد تقريب مناسب فقط؛ فالعدد الدقيق هو حقًّا العدد

القديم المألوف π. لكن سبب ظهوره في سياق مُنحنى الجرس ليس بديهيًّا على الإطلاق، حتى بالنسبة لعلماء الرياضيات، ويحتاج الأمر إلى معرفة متعمِّقة بعلم التفاضُل والتكامُل لفهم كيف ظهر في هذه الصيغة الرياضية، فضلًا عن «لماذا».

دعني أخبرك قصة أخرى عن π. منذ بضع سنوات، قررتُ تجديد حمَّام الطابق السفلي في منزلي. واكتشف سبنسر، وهو حِرفي متعدد المهارات على نحو مدهش جاء لتركيب البلاط، أنني ألَّفت العديد من كتب الرياضيات الشهيرة. فقال: «لديَّ مسألة في الرياضيات أريدك أن تساعدني في إيجاد حلٍّ لها. يجب أن أُركب البلاط فوق أرضية على شكل دائرة، وأحتاج إلى معرفة مساحتها، كي أحدد عدد البلاطات الذي سأحتاجه. هناك صيغة رياضية قد علَّمونا إياها ...»

أجبته: «ط نق تربيع.»

فقال: «أجل، إنها هي!» ومن ثَم ذكَّرته بكيفية استخدامها. فتركني وهو سعيد، بعد أن حصل على الإجابة على مسألته بخصوص عدد البلاطات، وحصل على نسخة موقعة من أحد كُتبي، وحصل على اكتشاف جديد وهو أن الرياضيات التي دَرَسها في المدرسة، على عكس اعتقاده الراسخ لفترة طويلة من الزمن، مفيدة في مِهنته الحالية.

الفرق بين القصتين واضح. في القصة الثانية، استخدمنا π لأنها قُدمت إلينا في علم الرياضيات من أجل حل هذا النوع من المسائل الرياضية بالتحديد في المقام الأول. إنها قصة بسيطة ومباشرة حول فعالية الرياضيات. في القصة الأولى، استخدمنا π أيضًا لحل المسألة، لكن وجودها كان مفاجأة. إنها قصة عن الفعالية «اللامعقولة»: تطبيق لفكرة رياضية في مجال منفصل تمامًا عن أصول تلك الفكرة ومجالات استخدامها.

في هذا الكتاب، أنا لن أتحدث كثيرًا عن الاستخدامات المعقولة للمجال الذي أنا مُهتمٌّ به وهو الرياضيات. صحيح أنها استخدامات قيِّمة، ومثيرة للاهتمام، وتمثل جزءًا من نطاق مجال الرياضيات، مثلها مثل أي شيء آخر، فهي على القدر نفسه من الأهمية، لكنها لا تجعلنا نقول مشدوهين: «يا للعجب!». إنها استخدامات يمكنها أيضًا تضليل أولئك أصحاب القرار في المجال، وجعلهم يتخيلون أن الطريقة الوحيدة لتطوير الرياضيات هي تحديد المشكلات ثم جعل علماء الرياضيات يخترعون طُرقًا لحلها. ليس هناك خطأ في إجراء أبحاث محددة الهدف من هذا النوع، لكن هذا يشبه خوض المرء معركة بذراع واحدة، بينما الذراع الأخرى مربوطة خلف ظهره. إن استقراء التاريخ يُظهر لنا على نحو متكرر قيمة الذراع الثانية،

وهو النطاق المذهل للخيال البشري. إن ما يمنح الرياضيات قوتها هو «اجتماع» هاتين الطريقتين في التفكير. إذ إن كلًّا منهما تكمل الأخرى.

على سبيل المثال، في عام ١٧٣٦، وجَّه عالم الرياضيات الكبير ليونهارت أويلر تفكيره لحل لُغز صغير غريب بخصوص تنزُّه الناس عبر الجسور. لقد كان يعلم أنه لغز مُثير للاهتمام؛ لأنه على ما يبدو يتطلَّب نوعًا جديدًا من الهندسة؛ نوعًا يتخلَّى عن الأفكار المعتادة للأطوال والزوايا. لكنه لم يكن ليتوقع أنه في القرن الحادي والعشرين سيصبح الحل الذي توصَّل إليه نقطةَ البداية في إيجاد طريقةٍ تساعد المزيد من المرضى في الحصول على فرصة إجراء عمليات زرع الكُلى التي تنقذهم من الموت. بدايةً، كانت عمليات زرع الكلى ستبدو خيالًا محضًا في ذلك الوقت، ولكن حتى لو لم تكن كذلك، فإن أي صِلة لها بذلك اللُّغز كانت ستبدو سخيفة.

ومن ذا الذي كان سيتخيل أن اكتشاف مُنحنيات ملء الفراغ — وهي المنحنيات التي تمر بكل نقطة من مربع مُصمَت — يمكن أن يساعد برنامج «وجبات على عجلات» — الذي يوصل وجبات طعامٍ إلى منازل كبار السن وذوي الحاجة — في تخطيط مسارات توصيل الطلبات الخاصة به؟ بالتأكيد ليس علماء الرياضيات الذين درسوا مثل هذه الموضوعات في تسعينيات القرن التاسع عشر، والذين كانوا مهتمين بكيفية تحديد مفاهيم معقَّدة مثل «الاتصال» و«البُعد»، والذين وجدوا أنفسهم في البداية يشرحون لماذا يمكن أن تكون المعتقدات الرياضية الراسخة خاطئة. وقد استنكر العديد من زملائهم هذا الخط البحثي بأكمله واعتبروه مُضللًا وسلبيًّا. وفي النهاية، أدرك الجميع أنه ليس من الجيد تجاهل الواقع، وافتراض أن كل شيء سيعمل بشكل مثالي، بينما في الحقيقة هذا لن يحدث.

ليست رياضيات الماضي فقط هي التي تُستخدم بهذه الطريقة. إذ تعتمد أساليب زرع الكُلى على العديد من الإضافات الحديثة على رؤية أويلر الأصلية، من بينها الخوارزميات الرائعة الخاصَّة بالتحسين التوافُقي التي تسعى للوصول إلى الخيار الأفضل من بين مجموعة كبيرة من الاحتمالات. إن التقنيات الرياضية اللانهائية التي يستخدمها محركو الصور المتحركة في الأفلام تشمل العديد من التقنيات الذين عُرفت منذ عقدٍ أو أقل. مثالٌ على ذلك هو «فراغ الأشكال»، وهو فراغ غير منتهي الأبعاد من المنحنيات التي تعتبر متشابهة إذا اختلفت فقط عن طريق تغيير الإحداثيات. وهي تستخدم لجعل تتابُعات التحريك تبدو أكثر سلاسة وأكثر طبيعية. وقد نشأ التماثُل المستمر، وهو تطور آخر حديث للغاية؛ لأن علماء الرياضيات البَحتة أرادوا حساب اللامتغيرات الطوبولوجية المعقَّدة التي تحسب

الثقوب المتعدِّدة الأبعاد في الأشكال الهندسية. وقد تبيَّن أيضًا أن طريقتهم وسيلة فعالة لضمان أن شبكات الاستشعار تُوفِّر تغطية كاملة عند حماية المباني أو القواعد العسكرية ضد الإرهابيين أو المجرمين الآخرين. إن المفاهيم المجردة المستمدَّة من الهندسة الجبرية — مثل «الرسوم البيانية التماثُلية المتفرِّدة» — يمكن أن تجعل اتصالات الإنترنت آمنةً ضد أجهزة الكمبيوتر الكمية. وهذه الأجهزة أجهزةٌ حديثة للغاية ظهرت مؤخرًا ولا تزال في مهدها، لكنها ستقضي على نظم التشفير المستخدَمة في عالمنا اليوم إذا تمكنت من تحقيق الآمال المعقودة عليها.

إن الرياضيات لا تفاجئنا بمثل هذه المفاجآت في حالات نادرة. لكنَّها تعد أمورًا معتادة بالنسبة لها. في الواقع، ومن وجهة نظر الكثير من علماء الرياضيات، فإن هذه المفاجآت هي الاستخدامات الأكثر إثارة للاهتمام في هذا المجال البحثي، وهي المبرر الرئيسي لاعتباره «مجالًا بحثيًّا»، بدلًا من مجرد جرابٍ بالٍ يحتوي على حِيَل متنوعة، يناسب كل منها كل نوع من أنواع المسائل.

تابع فيجنر حديثه عن الرياضيات قائلًا: «إن الفائدة الهائلة للرياضيات في العلوم الطبيعية هي شيء يقارب حد الغموض، و… لا يوجد تفسير عقلاني لذلك.» لقد نشأت، بالطبع، المفاهيم الرياضية في المقام الأول لحل مسائل في العلوم، وفيجنر لم يكن في حيرة من فعالية تلك المفاهيم في المجالات التي صُمِّمت من أجلها. ما كان يحيره هو فاعليتها في المجالات التي بدت أنها غير ذات صلة بها. لقد نشأ علم التفاضل والتكامل من أبحاث إسحاق نيوتن حول حركة الكواكب، لذلك ليس من المثير للدهشة كثيرًا أنه يساعدنا على فهم حركة الكواكب. لكن ما يثير الدهشة بالفعل هو أنه يُمكِّننا من إجراء تقديرات إحصائية للسكان، كما هو الحال في قصة فيجنر القصيرة، وكذلك من تفسير التغيُّرات في أعداد الأسماك التي جرى صيدُها في البحر الأدرياتيكي خلال الحرب العالمية الأولى،[4] والتحكم في عمليات تسعير عقود الخيارات في القطاع المالي، ومساعدة المهندسين في تصميم طائرات الركاب النَّفاثة، كما أنه أصبح مهمًّا للغاية في مجال الاتصالات. ويرجع ذلك إلى أنه لم يُبتكر من أجل أي غرض من هذا القبيل.

لقد كان فيجنر على حق. إن الطريقة التي تُستخدم بها الرياضيات على نحو متكرر — رغم أنها لم تُبتكر من أجل هذا — في العلوم الطبيعية، وكذلك في معظم مجالات النشاط البشري الأخرى، هي أمر يشبه اللغز. وأحد الحلول المقترَحة لهذا اللغز هو أن الكون قائم على الرياضيات، لذا يستعين به البشر في ابتكاراتهم المختلفة. وأنا لن أجادل حول مدى

صحة هذا التفسير هنا، ولكن إذا كان صحيحًا، فهو يستبدل بهذا اللغز لُغزًا آخر أكثر عمقًا. وهذا اللغز هو: لماذا الكون قائم على الرياضيات؟

على مستوى برجماتي أكثر، يمكن القول إن الرياضيات لديها العديد من الميزات التي تساعد على جعلها فعالة بشكل لا معقول من وجهة نظر فيجنر. إحدى تلك الميزات، التي أتَّفق مع وجهة نظر فيجنر بشأنها، هي صلاتها العديدة بالعلوم الطبيعية، التي تنتقل إلى عالم البَشر في شكل تكنولوجيا تحويلية. فالعديد من الابتكارات الرياضية الكبيرة قد نشأت بالفعل من الاستقصاءات العلمية. والبعض الآخر منها مُتجذِّر في اهتمامات البشر. فقد نشأت الأعداد من عمليات العد الأساسية (مثلًا: كم عدد الخراف التي أمتلكُها؟) والهندسة يعني مقابلُها الإنجليزي «قياس الأرض»، وكانت ترتبط ارتباطًا وثيقًا بتحديد قيمة الضرائب المفروضة على الأراضي، وفي مصر القديمة ارتبطت بعمليات بناء الأهرامات. ونشأ علم حساب المثلثات من علم الفلك، والملاحة، وصنع الخرائط.

لكن هذا وحده ليس تفسيرًا ملائمًا. فالعديد من الابتكارات الرياضية الكبيرة الأخرى لم تنشأ من استقصاءٍ علمي أو مشاكل بشرية محدَّدة. إن الأعداد الأولية، والأعداد المركبة، والجبر المجرد، والطوبولوجيا؛ كل هذه الاكتشافات/الابتكارات كان الدافع الأساسي للتوصُّل إليها هو فضول الإنسان وإدراك وجود نمط. وهناك سبب ثانٍ للفعالية الكبيرة للرياضيات، وهو أن علماء الرياضيات تستخدمها للبحث عن الأنماط واستخلاص التركيب الأساسي. إنهم يبحثون عن «الجمال»، ليس في الشكل، ولكن في المنطق. فعندما أراد نيوتن فهم حركة الكواكب، توصَّل إلى الحل عندما فكَّر باعتباره عالمَ رياضيات، وبحَث عن أنماط أكثر عمقًا تحت سطح المعلومات الفلكية المجردة. وعندئذٍ استنتج قانون الجاذبية.[5] إن العديد من أعظم الأفكار الرياضية لم يكن وراءها أي دافع واقعي على الإطلاق. فقد توصَّل بيير دو فيرما، المحامي الذي مارس الرياضيات من أجل التسلية في القرن السابع عشر، إلى اكتشافات أساسية في نظرية الأعداد؛ فقد توصَّل إلى أنماط متعمِّقة في سلوك الأعداد الصحيحة العادية. واستغرق الأمر ثلاثة قرون كي يجري التوصُّل إلى تطبيقات عملية لعمله في هذا المجال، ولكن في زمننا اليوم، المعاملات التجارية التي تعتمد عليها شبكة الإنترنت ما كانت لتصبح ممكنةً من دونه.

وهناك ميزة أخرى للرياضيات أصبحت واضحة بشكل متزايد منذ أواخر العقد الأول من القرن التاسع عشر وهي «العمومية». إن التراكيب الرياضية المختلفة لها العديد من

الميزات المشتركة. فقواعد الجبر البسيط تشبه قواعد الحساب. كما ترتبط الأنواع المختلفة من الهندسة (الإقليدية، والإسقاطية، وغير الإقليدية، وحتى الطوبولوجيا) ارتباطًا وثيقًا بعضها ببعض. ويمكن جعل هذا الارتباط الخفي واضحًا عبر العمل، من البداية، مع تراكيب عامة تخضع لقواعد محددة. وعند فهم التراكيب العامة، تصبح جميع الأمثلة الخاصة واضحة. وهذا يوفر الكثير من الجهد، الذي كان سيضيع بسبب إجراء نفس العملية عدة مرات باستخدام لغة مختلفة على نحو طفيف. ومع ذلك، فإن هذا الأسلوب يحتوي على جانب سلبي واحد؛ إذ يتسبب في جعل المجال أكثر تجريدًا. فبدلًا من الحديث عن أشياء مألوفة، مثل الأعداد، يجب أن تشير التراكيب العامة إلى أي شيء يخضع لنفس القواعد، مثل الأعداد، كما يتضح في مفاهيم مثل «الحلقة النوتيرية»، أو «فئة الموتر»، أو «الفراغ المتجهي الطوبولوجي». عند تطبيق هذا النوع من التجريد إلى أقصى مدى، قد يصبح من الصعب فهم ماهية التراكيب العامة، فضلًا عن كيفية الاستفادة منها. ومع ذلك، فهي مفيدة لدرجة أن عالم البشر لن يستطيع أن يؤدي أنشطته من دونها. هل تريد إنشاء منصة نتفليكس؟ إذن يجب على شخصٍ ما أن يجري العمليات الرياضية الخاصة بها. إن الأمر ليس سحرًا؛ إنه فقط شيء يشبهه.

هناك ميزة رابعة للرياضيات، وثيقة الصلة بشِدة بهذه المناقشة، وهي «قابلية التطبيق المتعدِّد». وهذه نتيجة لميزة العمومية التي تتسم بها، كما أنها السبب في أن التجريد ضروري. فبصرف النظر عن المسألة التي حفَّزته، فإن المفهوم أو الأسلوب الرياضي يمتلك مستوًى من العمومية غالبًا، ما يجعله قابلًا للتطبيق على مسائل مختلفة بعضها عن بعض تمامًا. وأي مسألة يمكن إعادة صياغتها في الإطار المناسب تصبح هدفًا مشروعًا لها. إن أبسط طريقة وأكثرها فعالية لإيجاد مفاهيم رياضية قابلة للتطبيق المتعدِّد هي تصميم هذه الميزة فيها من البداية، من خلال جعل التراكيب العامة واضحة فيها.

على مدى الألفي عامٍ الماضيَين، استمدَّت الرياضيات مصدر إلهامها من ثلاثة مصادر رئيسية، وهي: أعمال الطبيعة، وأعمال البشر، ومَيل العقل البشري الداخلي نحو البحث عن أنماطٍ. هذه الأعمدة الثلاثة تَدعم المجال بأكمله. الشيء المذهل هو أن الرياضيات، على الرغم من دوافعها المتنوعة، هي «كيان واحد». فقد أصبح كل فرع من فروع هذا العلم، أيًّا كانت أصوله وأهدافه، مرتبطًا بشدة بكل الفروع الأخرى وتصبح الروابط أكثر قوة وأكثر تشابُكًا من أي وقت مضى.

يشير هذا إلى سبب خامس يجعل الرياضيات فعالة للغاية، وبطُرق غير متوقعة، ألا وهو «الوحدة». وإلى جانب هذا، هناك سبب سادس، وهو الذي سأقدم أدلةً وافرة عليه عبر هذا الكتاب؛ ألا وهو: «التنوع».

إذن لدينا الميزات التالية: الواقعية، والجمال، والعمومية، وقابلية التطبيق المتعدِّد، والوحدة، والتنوُّع. وهذه الميزات تجتمع معًا لتؤدي إلى الفعالية الشديدة للرياضيات.

إن الأمر بهذا القدر من السهولة.

الفصل الثاني

كيف يختار السياسيون ناخبيهم؟

> لقد جرب عبثًا أهل أنكه-موربورك العديد من أنواع الحكومات، وانتهى بهم الأمر بذلك النوع من الديمقراطية الذي يعرف ب «رجل واحد، صوت واحد». كان الحاكم هو «الرجل»؛ وهو مَن حصل على «الصوت».
>
> تيري براتشيت، رواية «مورت»

لقد قدَّم اليونانيون القدماء أشياءَ عديدة للعالم؛ الشعر، والمسرح، والنحت، والفلسفة، والمنطق. كما قدموا لنا علم الهندسة، والديمقراطية، واللذَين قد تبين أنهما تربطهما صلة وثيقة على نحو أكبر مما قد يتوقعه أحد، حتى اليونانيون أنفسهم. إن النظام السياسي في أثينا القديمة كان بالتأكيد شكلًا محدودًا للغاية من أشكال الديمقراطية؛ حيث كان حق التصويت متاحًا للرجال الأحرار فقط، وليس للنساء أو العبيد. ومع ذلك، في زمن سيطر عليه حكام توارثوا السلطة، وحكام ديكتاتوريون، وطغاة، كانت ديمقراطية أثينا تُعَد تقدمًا متميزًا للغاية. الأمر نفسه ينطبق على الهندسة اليونانية، التي — وعلى يد العالم إقليدس الإسكندري — شدَّدت على أهمية جعل افتراضاتك الأساسية واضحة ودقيقة، واستخلاص كل شيء منها بطريقة منطقية ومنهجية.

يا للعجب، كيف يمكن تطبيق الرياضيات في مجال السياسة؟ فالسياسة تدور حول العلاقات الإنسانية، والاتفاقيات، والالتزامات، في حين أن الرياضيات تدور حول منطق جافٍّ مجرد. في الأوساط السياسية، تتفوق الخطابة البليغة على المنطق، وتبدو الحسابات الرياضية التي لا علاقة لها بالعُنصر البشري بمعزلٍ تمامًا عن المشاحنات السياسية. لكن السياسة، التي تتَّخذ من الديمقراطية أساسًا لها، تُنفَّذ وَفقًا لقواعد، والقواعد لها نتائج يصعب توقعها دائمًا عند وضع القواعد في البداية. وقد وضع العمل الرائد الذي قام به

إقليدس في الهندسة، والذي جُمع في مؤلفه الشهير بعنوان «العناصر»، معيارًا لاستنتاج النتائج من القواعد. في الواقع، هذا ليس تعريفًا سيئًا للرياضيات ككل. على أي حال، بعد ٢٥٠٠ عام فقط، بدأت الرياضيات في التسلُّل إلى عالم السياسة.

إن إحدى السمات الغريبة للديمقراطية هي أن السياسيين، الذين يدَّعون أنهم مخلصون لفكرة أن القرارات يجب أن تُتَّخذ بواسطة «الشعب»، يحيدون عن ذلك مرارًا وتكرارًا لضمان عدم حدوث ذلك. يعود هذا الاتجاه مباشرةً إلى أول تطبيق للديمقراطية في اليونان القديمة؛ حيث مُنح الحق في التصويت فقط للذكور البالغين من رجال أثينا، أي نحو ثلث السكان البالغين. ومنذ اللحظة التي جرى فيها تصوُّر فكرة انتخاب القادة واختيار السياسات عن طريق تصويت أفراد الشعب، جرى أيضًا تصوُّر الفكرة الأكثر جاذبية لعكس العملية برُمتها، من خلال التحكُّم فيمن يمكن أن يُدلوا بأصواتهم ومدى فعالية أصواتهم. وهذا أمر سهل، حتى عندما يكون لكل ناخبٍ صوت انتخابي واحد؛ لأن فعالية التصويت تعتمد على السياق الذي يجري فيه الإدلاء به، وهذا السياق يمكن التلاعبُ به. ومثلما وصف بروفيسور الصحافة وين دوكينز ذلك على نحو دقيق، فإن الأمر قد وصل إلى أن السياسيين أصبحوا هم الذين يختارون ناخبيهم، بدلًا من أن يختار الناخبون من يُمثلهم من السياسيين.[1]

هذا هو الموضع الذي تُستَخدم فيه الرياضيات. إنها لا تُستخدم في المناوشات التي تدور أثناء المناظرة السياسية، ولكن في هيكل قواعد المناظرة والسياق الذي تطبَّق فيه. إذ يُستخدم التحليل الرياضي في كلا الاتجاهين. فيمكنه أن يكشف عن أساليب جديدة ماكرة للتلاعب بالأصوات الانتخابية. كما يمكنه أن يُسلِّط الضوء على مثل هذه الممارسات، مما يوفر أدلةً واضحة على هذا النوع من التدخل، يمكن استخدامها في بعض الأحيان لمنع حدوثه من الأساس.

وتخبرنا الرياضيات أيضًا أن أي نظام ديمقراطي يجب أن ينطوي على بعض التنازلات. فلن يمكنك الحصول على كل ما تريد، مهما كنت ترغب فيه بشدة؛ لأن قائمة الأمور المرغوب فيها ذاتية التناقض.

في ٢٦ مارس ١٨١٢ قدمت صحيفة «ذا بوسطن جازيت» إلى العالم كلمة جديدة، وهي «جيريماندر». إن هذه الكلمة، التي هجاؤها في الأصل «جيري-ماندر»، هي التي أوضح لويس كارول لاحقًا أنها كلمة مركَّبة، صِيغت عن طريق الجمع بين كلمتين عاديَّتين.

«ماندر» وهي المقطع الأخير في كلمة «سالاماندر»، و«جيري» هو اسم العائلة الخاص بإلبريدج جيري، حاكم ولاية ماساتشوستس. ونحن لا نعرف على وجه اليقين مَن أوَّل من جمع المقطعين من أجل تكوين تلك الكلمة المركبة، ولكن على أساس غير قاطع، يميل المؤرخون إلى نسب الأمر لأحد مُحرِّري تلك الصحيفة التالين: ناثان هيل، أو بنجامين راسل، أو جون راسل. وبالمصادفة، تنطق كلمة «جيري» دون تعطيش حرف الجيم، لكن الكلمة المركبة «جيريماندر» تنطق مع تعطيش حرف الجيم.

ما الأمر الذي كان يفعله إلبريدج جيري كي يستفز المحرر ويجعله يدمج اسمه مع اسم مخلوق يشبه السِّحلِيَّة، الذي، في فولكلور العصور الوسطى، اشتهر بالعيش وسط النيران؟

الإجابة هي تزوير إحدى العمليات الانتخابية.

على نحو أكثر تحديدًا، كان جيري مسئولًا عن مشروع قانون أعاد ترسيم حدود الدوائر الانتخابية في ولاية ماساتشوستس من أجل انتخابات مجلس الشيوخ في الولاية. إن تقسيم الدولة إلى دوائر انتخابية له علاقة بالحدود بكل تأكيد؛ وهو أمر شائع، ولطالما كان كذلك منذ مدة طويلة، في معظم الدول الديمقراطية. إن السبب الظاهري لذلك هو أن يصبح الأمر عمليًّا أكثر؛ فمن الصعب اتخاذ القرارات إذا تَوجَّب على كل فرد من أفراد الأمة أن يصوِّت على كل اقتراح. (يحدث شيء مقارب لذلك في سويسرا؛ إذ خلال ما يصل إلى أربع مرات في السنة يختار المجلس الفيدرالي مقترحاتٍ كي يُدلي المواطنون بأصواتهم بشأنها، فيما يُعَد في الواقع سلسلة من الاستفتاءات. ومن ناحية أخرى، لم تُشارك النساء هناك في عملية التصويت قبل عام ١٩٧١، وظلت كانتون واحدة تعارض ذلك حتى عام ١٩٩١.) إن الحل التقليدي هو اختيار الناخبين لمجموعة من الأشخاص كي ينوبوا عنهم، والسماح لهؤلاء الأشخاص باتخاذ القرارات. ويتمثَّل أحد الأساليب الأكثر عدالةً في التمثيل النسبي؛ حيث يتناسب عدد نواب حزبٍ سياسي معين مع عدد الأصوات التي يحصل عليها هذا الحزب. وأكثر الطرق استخدامًا لفعل ذلك، هي تقسيم السكان إلى دوائر انتخابية، وتنتخب كل دائرة عددًا من النواب، يتناسبون مع عدد الناخبين في تلك الدائرة الانتخابية.

على سبيل المثال، في الانتخابات الرئاسية الأمريكية، تُصوِّت كل ولاية لعددٍ محدَّد من أعضاء المجمع الانتخابي. كل عضو له صوت انتخابي واحد، ويفوز بمنصب الرئيس من يحصل على الأغلبية البسيطة من عددِ هذه الأصوات. إنه نظام نشأ عندما كانت الطريقة الوحيدة لإرسال رسالة من إحدى المناطق النائية في أمريكا إلى مراكز السلطة هي حملها

على ظهر حصان أو في عَرَبة تجرُّها الخيول. ثم ظهرت قطارات السكك الحديدية التي تمتدُّ خطوطها لمسافات طويلة، وخدمة التلغراف في وقت لاحق. في ذلك الزمن، كانت عملية إحصاء عدد أصوات مجموعات ضخمة من الأفراد بطيئة للغاية.[2] لكن هذا النظام منح أيضًا السيطرة للصفوة من أعضاء المجمَّع الانتخابي. في الانتخابات البرلمانية البريطانية، تُقسم البلاد إلى دوائر انتخابية (جغرافية في الأساس)، ينتخب كلٌّ منها عضوًا واحدًا في البرلمان. ثم يصبح الحزب (أو ائتلاف الأحزاب) الفائز بأغلبية مقاعد النُّواب هو الحزب الحاكم، ويُطلب منه تشكيل الحكومة، ويختار أحد نوابه ليصبح رئيسَ الحكومة، وذلك من خلال مجموعة متنوعة من الأساليب. ويتمتع رئيس الحكومة بسلطات كبيرة، ومن نواحٍ كثيرة، هو أشبه برئيس جمهورية.

هناك أيضًا سببٌ خفي لقصر المشاركة في عملية اتخاذ القرارات الديمقراطية على عدد صغير من النواب، وهو أن تزوير عملية التصويت يصبح أكثر سهولة. إن جميع هذه الأنظمة بها عيوب أساسية، تؤدي غالبًا إلى نتائج غريبة، وفي بعض الأحيان يمكن استغلالها لتجاهل إرادة أفراد الشعب. ففي العديد من الانتخابات الرئاسية الأمريكية التي أُجريت مؤخرًا، كان إجمالي عدد الأصوات التي منحها أفراد الشعب للمرشح الذي خسر الانتخابات أكبر من عدد الأصوات التي منحها للمرشح الذي فاز. من المعروف أن الطريقة الحالية لاختيار رئيس الجمهورية لا تعتمد على إجمالي عدد أصوات أفراد الشعب التي حصل عليها المرشَّح، ولكن رغم تطور وسائل الاتصال الحديثة، فالسبب الوحيد لعدم التغيير إلى نظام أكثر عدلًا هو أن الكثير من الأشخاص ذوي النفوذ يفضلون بقاء هذه الطريقة كما هي.

إن المشكلة الكامنة هنا هي «الأصوات المهدَرة». في كل ولاية، يحتاج أي مرشح إلى الحصول على نصف إجمالي عدد أصوات المصوِّتين في هذه الولاية زائد واحد (أو نصف صوت إذا كان المجموع فرديًّا) كي يفوز في الانتخابات عن هذه الولاية؛ وأي أصوات إضافية تتجاوز تلك العتبة لا تُحدِث فرقًا في مرحلة تصويت أعضاء المجمع الانتخابي. وهكذا، في الانتخابات الرئاسية لعام ٢٠١٦، حصل دونالد ترامب على ٣٠٤ أصوات من إجمالي أصوات أعضاء المجمع الانتخابي؛ بينما حصلت هيلاري كلينتون على ٢٢٧ صوتًا، لكن إجمالي عدد أصوات أفراد الشعب التي حصلت عليها كلينتون كان أكثر مما حصل عليه ترامب بمقدار ٢٫٨٧ مليون صوت. وبذلك أصبح ترامب خامس رئيس أمريكي يُنتخب ويفوز بالمنصب رغم عدم حصوله على أغلبية عدد أصوات أفراد الشعب.



الرسم الكاريكاتيري الخاص بالتلاعب الجيريماندري، الذي أغلب الظن أنه قد رُسم في عام ١٨١٢ على يد إلكاينا تيسديل.

إن حدود الولايات الأمريكية في واقع الأمر غير قابلة للتغيير، لذلك لا يمكن تغييرها عند تقسيم الدوائر الانتخابية. في انتخابات أخرى، يمكن إعادة ترسيم حدود الدوائر، عادةً من قِبل الحزب الذي يتولى مقاليد السلطة، وهنا يمكن أن يبدأ التلاعب. على وجه التحديد، يمكن لهذا الحزب أن يرسم الحدود بطريقة تضمن إهدار أعداد كبيرة جدًّا من الأصوات المؤيدة للحزب المعارض. وهذا ما حدث من جانب إلبريدج جيري ومجلس الشيوخ. فعندما اطَّلع الناخبون في ولاية ماساتشوستس على خريطة الدوائر الانتخابية،

بدا معظمُها طبيعيًّا تمامًا. عدا واحدة. إذ جمعت تلك الدائرة اثنتي عشرة مقاطعة من غرب وشمال الولاية في منطقة واحدة شاسعة ومتعرِّجة. وقد بدت تلك المنطقة أشبه بالسالاماندر لرسام الكاريكاتير السياسي المسئول عن الرسم الكاريكاتيري الذي ظهر بعد ذلك بمدة قصيرة في صحيفة «ذا بوسطن جازيت»، الذي أغلب الظن أنه الرسام والمصمِّم والنحات، إلكاينا تيسديل.

كان ينتمي جيري إلى الحزب الجمهوري الديمقراطي، الذي كان في منافسة مع الفيدراليين. وفي انتخابات عام ١٨١٢، فاز الفيدراليون بأغلبية مقاعد مجلس النواب في الولاية وبمنصب الحاكم، وخسر جيري المنصب. لكن ما فعله جيري فيما يتعلق بإعادة ترسيم الدوائر الانتخابية لمجلس الشيوخ في الولاية حقَّق الهدف منه، وضمن فوزًا مريحًا للجمهوريين الديمقراطيين في انتخابات مجلس الشيوخ الخاصة بالولاية.

إن تحديد الجوانب الرياضية المتعلقة بالتلاعب الجيريماندري يبدأ بالنظر في كيفية قيام الناس به. وهناك نوعان من التكتيكات الرئيسية في هذا الشأن، وهما الحشد والتفتيت. من خلال تكتيك «الحشد»، يجري نشر الناخبين المؤيدين لك في أكبر عدد ممكن من الدوائر الانتخابية، على نحوٍ متساوٍ قدر الإمكان، بأغلبية صغيرة ولكنها حاسمة، مع ترك باقي الدوائر إلى العدو. آسف، أقصد المنافس. أما من خلال تكتيك «التفتيت»، فيُشتت الناخبون المؤيدون للمنافس حتى يخسر أكبر عدد ممكن من الدوائر الانتخابية. إن عملية «التمثيل النسبي»، التي يتناسب فيها عدد النواب مع إجمالي أصوات كل حزب (أو أقرب ما يكون إلى ذلك قدر الإمكان، بالنظر إلى الأرقام)؛ تتجنب هاتين الحيلتين، كما أنها أكثر عدلًا. ومما لا يثير الدهشة أن دستور الولايات المتحدة يرى أن «التمثيل النسبي» أمر غير قانوني؛ لأنه وَفق ما ينص عليه القانون، يجب أن ينوب عن الدائرة الانتخابية ممثل واحد فقط. في عام ٢٠١١ أجرت المملكة المتحدة استفتاءً على بديل آخر، وهو التصويت الفردي القابل للتحويل، وقد صوَّت الشعب ضده. ولم يحدث على الإطلاق أن أُجري استفتاء على التمثيل النسبي في المملكة المتحدة.

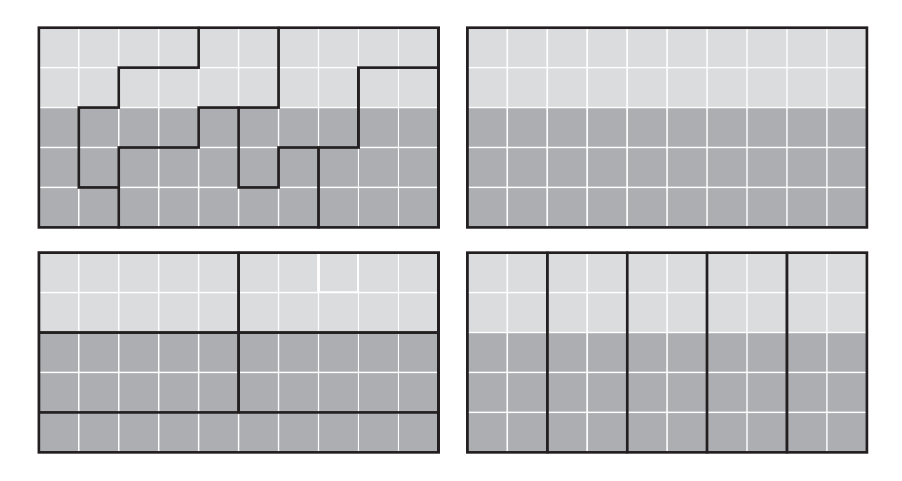
إليك كيفية عمل تكتيكَي الحشد والتفتيت، عبر عرض مثال تخيُّلي ذي جغرافيا وتوزيعات تصويت بسيطَين للغاية.

في ولاية جيريمانديا، يتنافس حزبان سياسيان على الفوز بأصوات الناخبين: الحزب الأبيض، والحزب الأسود. وهناك خمسون منطقة، يجب تقسيمها إلى خمس دوائر انتخابية.

في الانتخابات الأخيرة، كان يحصل الحزب الأبيض على أغلبية الأصوات في عشرين منطقة، تقع كلها في الشمال، بينما كان يحصل الحزب الأسود على أغلبية الأصوات في المناطق الجنوبية الثلاثين المتبقية (كما هو موضَّح في الشكل التالي أعلى اليمين). ومن ثم أعادت إدارة الحزب الأبيض، التي فازت بفارق ضئيل للغاية في الانتخابات السابقة، ترسيمَ حدود الدوائر الانتخابية في الولاية من خلال تجميع الكثير من مؤيديها داخل ثلاث دوائر انتخابية (كما هو موضح في الشكل أعلى اليسار)، بحيث تفوز في ثلاث مناطق ويفوز الحزب الأسود في اثنتين فقط. وقد طعن الحزب الأسود لاحقًا على عملية إعادة ترسيم الدوائر في المحكمة، مستنِدًا إلى أن حدود الدوائر الانتخابية قد جرى التلاعب بها وفق الطريقة الجيريماندرية الشهيرة، وتمكن من الحصول على حق إعادة ترسيم الدوائر في الانتخابات التالية؛ حيث استخدم تكتيك التفتيت (كما هو موضَّح بالشكل أسفل اليمين) لضمان الفوز بأغلبية الأصوات في جميع الدوائر الانتخابية الخمس.

إذا كان من المحتَّم أن تتكون كل دائرة انتخابية من عشرٍ من المناطق المربعة الصغيرة، فإن أفضل ما يمكن أن يحققه الحزب الأبيض باستخدام تكتيك الحشد هو الفوز بثلاث دوائر من أصل خمس. إذ يحتاج إلى الفوز بست من أصل عشر مناطق للفوز بأي دائرة، وهو يفوز في عشرين منطقة، ومن ثَم يمكن حشد كل ست مناطق منها في دائرة ليتمكَّن من الفوز بثلاث دوائر، وتتبقى منطقتان لن يتمكن من الاستفادة منهما. بينما أفضل ما يمكن أن يحققه الحزب الأسود باستخدام تكتيك التفتيت هو الفوز بالدوائر الخمس. أما التمثيل النسبي، فسيمنح الحزب الأبيض دائرتين، ويمنح الحزب الأسود ثلاث دوائر، كما هو موضح في الشكل أسفل اليسار. (في واقع الأمر، إن التمثيل النسبي لا يتحقَّق من خلال ترسيم الدوائر الانتخابية.)

إن البلدان التي يحكمها حاكم ديكتاتور، أو أشبه بالديكتاتور، تجري فيها الانتخابات عادة كي تُثبت للعالم كم أن ذلك الحاكم يتَّسم بالديمقراطية. وعلى نحوٍ عام تُزوَّر هذه الانتخابات، وحتى إذا سُمح بالطعون القانونية، فإن تلك الطعون لا تُجدي أبدًا؛ لأن الأحكام القضائية الصادرة من المحاكم تُزوَّر أيضًا. أما في بلدان أخرى، ليس من الممكن فقط الطعن على أي محاولة لإعادة ترسيم الدوائر للمساءلة القانونية، ولكن أيضًا تكون هناك فرصة لأن يفلح ذلك الطعن، لأن الأحكام القضائية الصادرة من المحاكم مستقلة في الغالب عن الحزب الحاكم. هذا بالطبع باستثناء تعيين بعض القضاة على أساسٍ حزبي.



إعادة ترسيم حدود الدوائر الانتخابية في جيريماندريا. أعلى اليمين: خمسون منطقة يجب تقسيمها إلى خمس دوائر انتخابية، يضم كلٌّ منها عشر مناطق. تمثل الخانات ذات التظليل الفاتح مناطق الأغلبية المتوقَّعة للحزب الأبيض، وتمثل الخانات ذات التظليل الداكن مناطق الأغلبية المتوقَّعة للحزب الأسود. أعلى اليسار: تكتيك الحشد يمنح الحزب الأبيض أغلبية عدد الأصوات في ثلاث دوائر انتخابية، ويمنح الحزب الأسود أغلبية عدد الأصوات في دائرتين. أسفل اليمين: يمنح تكتيك التفتيت الحزب الأسود أغلبية عدد الأصوات في كل الدوائر الانتخابية الخمس. أسفل اليسار: هذا التقسيم سيعطي تمثيلًا نسبيًّا.

في مثل هذه الحالات، فإن المشكلة الرئيسية التي تواجه القضاة ليست سياسية. إنها تتعلق بكيفية إيجاد طرقٍ موضوعية لتحديد ما إذا كانت هناك عملية تلاعب جيريماندري أم لا. ففي مقابل كل «خبير» يفحص الخريطة بمنتهى الدقة ويعلن عن وجود عملية تلاعُب جيريماندري، يمكنك دائمًا أن تجد خبيرًا آخر يصل إلى النتيجة المعاكسة. لذا هناك حاجة إلى طُرقٍ أكثر موضوعية من الآراء والحجج اللفظية.

هذه فرصة واضحة للاستفادة من الرياضيات. فيمكن أن تحدد الصِّيَغ الرياضية أو الخوارزميات ما إذا كانت حدود الدوائر الانتخابية معقولة وعادلة، أم مصطَنَعة ومنحازة، على نحو محدد بوضوح. إن تصميم هذه الصيغ أو الخوارزميات ليس في حد ذاته عمليةً موضوعية، بالطبع، ولكن بمجرد الاتفاق عليها (وهي عملية سياسية بعض الشيء)، يعرف جميع من له صلة بالأمر ماهيَّتها، وأنه يمكن التحقق من نتائجها بشكل مستقل. وهذا يوفر للمحكمة أساسًا منطقيًّا تبني عليه حكمها.

بعد أن فهمت الأسلوبين الخفيَّين اللذَين يمكن للسياسيين استخدامهما لتنفيذ عملية إعادة ترسيم للدوائر الانتخابية على نحو يخدم مصالحهم الحزبية، يمكنك ابتكار قواعد رياضية للكشف عنهما. وقواعد مثل تلك لا يمكن أن تكون قواعد مثالية؛ في الواقع، هناك دليل على أن وصولها إلى المثالية أمر مستحيل، وهذا ما سأتطرق إليه بمجرد أن تصبح لدينا خلفية لنفهم ما يوضحه لنا. هناك خمسة أنواع من الأساليب تُستخدم حاليًّا في هذا الإطار:

- اكتشاف الدوائر الانتخابية ذات الشكل الغريب.
- اكتشاف اختلالات في نسبة المقاعد إلى الأصوات.
- تحديد عدد الأصوات المهدَرَة التي تتسبب فيها عملية معينة من ترسيم الحدود، ومقارنة ذلك بما تقرر أن يكون مقبولًا.
- فحص جميع الخرائط الانتخابية الممكنة، وتقدير النتيجة المحتملة من حيث عدد المقاعد بِناءً على بيانات الناخبين الحالية، وتحديد ما إذا كانت الخريطة المقترحة تؤدي إلى نتائج مختلفة عن المتوقَّع إحصائيًّا.
- إعداد البروتوكولات التي تضمن أن القرار النهائي عادل، ويُنظر إليه على أنه عادل، ويتفق كلا الحزبين على أنه عادل.

إن الأسلوب الخامس هو الأكثر إدهاشًا، وسبب الدهشة هو أنه يمكن تطبيقه بالفعل. فلنتحدث عن كل أسلوب على حدة، ونترك الدهشة للنهاية.

لنتحدث، أولًا، عن الأشكال الغريبة.

منذ وقت طويل، وتحديدًا في عام ١٧٨٧، كتب جيمس ماديسون في «الأوراق الفيدرالية» أن «الحد الطبيعي في أي ديمقراطية هو تلك المسافة من النقطة المركزية التي ستسمح للمواطنين القاطنين بأبعد المناطق النائية أن يتجمَّعوا كلما تطلب الأمر معرفةَ رأيهم في القرارات العامة». وعند تطبيق ذلك حرفيًّا، فهو يقترح أن تصبح الدوائر الانتخابية على شكل دائرة تقريبًا، وألا تصبح ضخمة للغاية على نحوٍ يجعل زمن الرحلة من الأطراف إلى المركز غير معقول.

لنفترض، على سبيل المثال، أن التجمع الرئيسي للناخبين المؤيدين لحزبٍ سياسيٍّ ما يتركز في المناطق الساحلية. عند تجميع كل هؤلاء الناخبين في دائرة انتخابية واحدة

نحصل على شكل طويل، ورفيع، ومتعرج، يمتدُّ على طول الساحل، وهو شكل غير طبيعي تمامًا مقارنةً بجميع الدوائر الانتخابية الأخرى ذات الشكل المعقول والمدمَج. سيصبح من الصعب ألا نستنتج أن هناك أمرًا غريبًا قد جرى تدبيره، وأنه أُعيد ترسيم حدود تلك الدائرة على نحوٍ يؤدي إلى إهدار الكثير من أصوات ناخبي هذا الحزب. إن الدوائر الانتخابية التي تحدث فيها عملية تلاعب جيريماندري غالبًا ما يشي شكلها الغريب بطبيعتها المتحيزة تجاه مصلحة حزبٍ ما، مثلما حدث في أول دائرة انتخابية جرى التلاعب فيها وأدت إلى ظهور هذا المصطلح.

يمكن للجدل الدائر بين المحامين حول ما يمكن اعتباره شكلًا غريبًا للدائرة الانتخابية أن يمتد إلى ما لا نهاية. لذا في عام ١٩٩١ قدَّم المحاميان دانييل بولسبي وروبرت بوبر طريقةً لتحديد مقدار غرابة شكل الدائرة الانتخابية أصبحت الآن تُعرف باسم «مقياس بولسبي-بوبر».[3] وصيغتها هي:

$$4\pi$$ × مساحة الدائرة الانتخابية ÷ مربع محيط الدائرة الانتخابية

إن أي شخص لديه أي وعي بالرياضيات سينجذب انتباهه على الفور إلى هذا العامل الرياضي 4π. ومثلما تساءل صديق فيجنر عن الصلة بين التعداد السكاني والدوائر الهندسية، يمكننا أن نسأل ما هي الصلة بين الدوائر الهندسية والترسيم السياسي لحدود الدوائر الانتخابية. والإجابة بسيطة ومباشرة على نحو مثير: فالدائرة الهندسية هي أكثر شكل مدمَج يمكن الحصول عليه للدائرة الانتخابية.

هذه الحقيقة لها تاريخ طويل. فوَفقًا للمصادر اليونانية والرومانية القديمة، لا سيما القصيدة الملحميَّة «الإنيادة» للشاعر فيرجيل وكتاب «التواريخ الفيليبية» للمؤرخ نايوس بومبيوس تروجوس، فإن مَن أسس دولة مدينة قرطاج هي الملكة ديدو. وقد لخص المؤرخ جونيانوس جاستينوس كتاب تروجوس التاريخي في القرن الثالث الميلادي، وهو يحكي عن أسطورة مذهِلة. كانت ديدو وشقيقها بيجماليون وريثَي العرش لملك مدينة صور الذي لم يُحدد اسمه في الأسطورة. وعندما تُوفي الملك، أراد الشعب أن يُجلِس بيجماليون على العرش بمفرده ويتولى حكم المدينة، على الرغم من صِغَر سنه. وتزوجت ديدو من عمها، أسرباس، الذي كان يُشاع عنه أن لديه كَنزًا من الذهب يحتفظ به على نحو سري، وقد أراد بيجماليون الاستيلاء على ذلك الكنز، لذلك قتل أسرباس. ومن ثَم تظاهرت ديدو بإلقاء الكنز الذهبي المزعوم في البحر، بينما في الواقع ألقت أكياسًا تحتوي

على رمال. ونظرًا لمخاوفها المبرَّرة من أن يصب بيجماليون جام غضبه عليها، سارعت بالهرب، في البداية إلى قبرص، ثم إلى ساحل شمال أفريقيا. وطلبت من ملك البربر ياربَاس منحها قطعة صغيرة من الأرض؛ حيث يمكن أن تقيم فيها لفترة من الوقت، فوافق على أنه بإمكانها الحصول على مساحة من الأرض بمقدار ما يمكن أن يحيط به جلد ثور واحد. فقطعت ديدو جلد الثور إلى شرائط رفيعة للغاية، وصنعت منها دائرة أحاطت بها تل قريب، وقد أصبح اسمه حتى يومنا هذا بيرسا، وهو ما يعني «جلد». وأصبح ذلك المقر فيما بعد هو مدينة قرطاج، وعندما تنامت ثروة المدينة، أرسل ياربَاس تهديدًا إلى ديدو بأنها يجب أن تتزوجه وإلا فسيدمر المدينة. ومن ثَم قدمت العديد من القرابين على مذبحٍ ضخم لحرق الجثث، متظاهرة بأن هذا كان لتكريم زوجها الأول، كي تصبح مستعدة للزواج من ياربَاس؛ ثم صعدت إلى المذبح، وقالت إنها ستلحق بزوجها الأول بدلًا من الخضوع لرغبات ياربَاس، وقتلت نفسها بسيف.

نحن لا نعرف على وجه اليقين ما إذا كانت الملكة ديدو شخصية حقيقية بالفعل أم أنها من وحي الخيال، على الرغم من أن بيجماليون شخصية حقيقية بالتأكيد، وقد ذكرت بعض المصادر الملكة ديدو مثلما ذكرته. لذلك من غير المجدي أن نتحرَّى الدقة التاريخية للأسطورة. وأيًّا ما كان الأمر، فإن الأسطورة التاريخية تحوي أسطورةً رياضية بداخلها: لقد استخدمت ديدو جلد الثور لتصنع دائرة حول التل. لماذا صنعت دائرة؟ لأنها — هكذا يزعم علماء الرياضيات — عرفت أن الدائرة تحيط بأكبر مساحة لمحيطٍ ما.[4] كانت هذه الحقيقة العلمية، التي تحمل الاسم المثير للإعجاب «متباينة المحيط الثابت»، معروفة بِناءً على التجريب والملاحظة في اليونان القديمة، ولكنها لم تثبت على نحو دقيق حتى عام ١٨٧٩، عندما استطاع عالم الرياضيات المتخصص في التحليل المركَّب كارل فايرشتراس إكمال خمسة براهين مختلفة نشرها عالم الهندسة ياكوب شتاينر. أثبت شتاينر أنه إذا كان هناك وجود لما يُسمى شكلًا هندسيًّا مثاليًّا، فلا بد أنه دائري، لكنه فشل في إثبات وجوده.[5]

تنص متباينة المحيط الثابت على ما يلي:

مربع محيط الشكل أكبر من أو يساوي 4π مضروبًا في مساحته

وهذا ينطبق على أي شكل في السطح المستوي، طالما أن له محيطًا ومساحة. علاوة على ذلك، الثابت، 4π، هو أكثر عدد مناسب يمكن استخدامه — إذ لا يمكن جعل قيمته أكبر

من ذلك — ويكون الطرف الأول من المعادلة مساويًا للطرف الآخر فقط عندما يكون الشكل دائرة.[6] وقد ساعدت متباينة المحيط الثابت المحاميَين بولسبي وبوبر على اقتراح أن الأسلوب الذي أسميته مقياس بولسبي-بوبر هو طريقة فعالة لقياس مدى دائرية شكلٍ ما. على سبيل المثال، إن ناتج هذا المقياس لكل شكل من الأشكال التالية هو كالتالي:

الدائرة: ١

المربع: ٠٫٧٨

المثلث متساوي الأضلاع: ٠٫٦

أما الشكل الذي يُثبت وجود التلاعب الجيريماندري، فإن ناتجه، وفقًا لهذا المقياس، يساوي ٠٫٢٥ تقريبًا.

ومع ذلك، فإن هذا المقياس له عيوب خطيرة. ففي بعض الأحيان تصبح الأشكال الغريبة أمرًا لا مفرَّ منه بسبب السمات الجغرافية المحلية، مثل الأنهار والبحيرات والغابات وأشكال السواحل. علاوة على ذلك، يمكن أن يكون شكل الدائرة الانتخابية أنيقًا ومُدمَجًا، ومع ذلك يبدو بوضوح حدوث تلاعب جيريماندري. في عام ٢٠١١ جرت عملية ترسيم لحدود الدوائر الانتخابية من أجل إجراء انتخابات الهيئة التشريعية لولاية بنسلفانيا، وقد كانت أشكال الدوائر مشوَّهة ومصطَنَعة للغاية، لذلك في عام ٢٠١٨، أعد الجمهوريون في الهيئة التشريعية بالولاية مقترحات لاستبدالها. وفي تلك المقترحات جرى ترسيم الدوائر على نحو مدمَج للغاية وفقًا لخمسة مقاييس حددتها المحكمة العليا للولاية، لكن التحليل الرياضي لتوزيعات الناخبين داخل تلك الدوائر أظهر أن حدودها شكَّلت مناطق ذات تحيُّز حزبي واضح، وأنها ستؤدي إلى حدوث انحراف في نتائج التصويت.

حتى مقياس الرسم الذي تُرسم الخريطة بِناءً عليه يمكن أن يُسبب مشاكل. إن الأمر الرئيسي هنا هو هندسة الفراكتالات. الفراكتال هو شكل هندسي ذو بِنية مفصلة على جميع المقاييس. إن العديد من الأشكال الطبيعية تبدو مثل الفراكتالات؛ على الأقل، هي تشبهها إلى حدٍّ كبير أكثر من مثلثات ودوائر إقليدس. يمكن نمذجة السواحل والسُّحب على نحو فعَّال للغاية على هيئة فراكتالات، وهي تستطيع أن تعبر عن بِنيتها المعقَّدة. وقد صاغ مصطلح الفراكتال في عام ١٩٧٥ بونوا ماندلبرو، وهو العالِم الذي أسس وطوَّر علم هندسة الفراكتالات بأكمله. تعتبر السواحل والأنهار منحنياتٍ فراكتالية معقدة للغاية، ويعتمد الطول الذي تقيسه على مدى دقة المقياس الذي تستخدمه لإجراء القياس. في

الواقع، إن طول أي منحنى فراكتال يمتدُّ إلى ما لا نهاية من الناحية النظرية، ويترجم في الواقع اليومي إلى الآتي: «الطول المَقيس يتزايد بلا نهاية كلما نظرت إليه على نحو أكثر قربًا». لذلك يمكن للمُحامين أن يجادلوا إلى أجل غير مسمًّى حول قياس محيط الدائرة الانتخابية، وليس فقط حول ما إذا كانت الدائرة قد تعرَّضت للتلاعب الجيريماندري.

نظرًا لأن تحديد مدى غرابة شكلٍ ما هو أمر صعب للغاية، فلنجرب شيئًا أكثر بساطةً. هل تتطابق نتائج الإدلاء بالأصوات مع أنماط التصويت الإحصائية للناخبين؟

إذا أُجريت الانتخابات بين حزبين في دائرة ما على ١٠ مقاعد، وقد أشارت الإحصائيات إلى انقسام أصوات الناخبين بنسبة ٤٠ إلى ٦٠، فيمكنك توقُّع حصول أحد الحزبين على ٦ مقاعد وحصول الحزب الآخر على ٤ مقاعد. لكن إذا فاز حزبٌ ما بكل المقاعد العشرة، فهنا يمكنك أن تشك في وقوع تلاعب جيريماندري. لكن الأمر ليس بهذه البساطة. فهذا النوع من النتائج شائع في أنظمة التصويت التي تقوم على «الفوز للأكثر أصواتًا». في الانتخابات العامة بالمملكة المتحدة لعام ٢٠١٩، حصل حزب المحافظين على ٤٤٪ من إجمالي عدد الأصوات، لكنه فاز بـ ٣٦٥ مقعدًا من أصل ٦٥٠، وهو ما يمثل ٥٦٪ من إجمالي عدد المقاعد. وحصل حزب العمال على ٣٢٪ من الأصوات و٣١٪ من المقاعد. وحصل الحزب الوطني الاسكتلندي على ٤٪ من الأصوات، و٧٪ من المقاعد (على الرغم من أن هذه حالة خاصة؛ لأن قاعدة الناخبين الخاصة بهذا الحزب موجودة بالكامل في اسكتلندا). وحصل الديمقراطيون الليبراليون على ١٢٪ من الأصوات، و٢٪ من المقاعد. وقد نتجت معظم هذه التناقضات عن أنماط التصويت الإقليمية، وليس عن إعادة ترسيم حدود الدوائر الانتخابية على نحوٍ غريب. في نهاية المطاف، إذا جرت انتخابات بين حزبين من أجل اختيار شخص واحد، لمنصب رئيس الجمهورية على سبيل المثال، ونصت القوانين الانتخابية على تحديد الفائز بالمنصب من خلال الأغلبية البسيطة من عدد أصوات الناخبين، فإن ٥٠٪ من الأصوات زائد صوت واحد ستمنحه المنصب بنسبة ١٠٠٪.

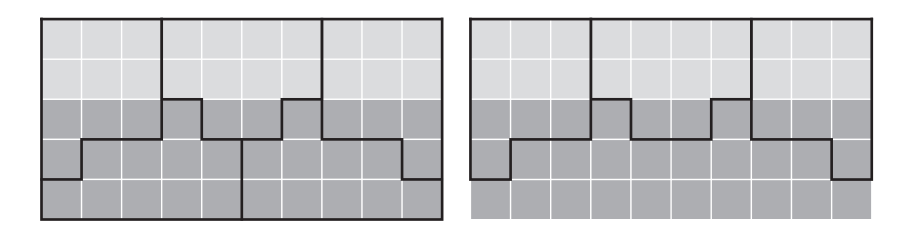
إليك مثال أمريكي. في ماساتشوستس، في الانتخابات الفيدرالية والرئاسية منذ عام ٢٠٠٠، يحصل الجمهوريون على أكثر من ثلث العدد الكُلي للأصوات. ومع ذلك، كانت المرة الأخيرة التي فاز فيها جمهوريٌّ بمقعد في مجلس النواب عن تلك الولاية في عام ١٩٩٤. هل حدث هذا بسبب عملية تلاعب جيريماندري؟ الإجابة على الأرجح هي كلَّا. إذا جرى توزيع نسبة الثلث التي يمثلها عدد الناخبين الجمهوريين على نحو عادل ومتساوٍ في

جميع أنحاء الولاية، عندئذٍ فأيًّا كانت الطريقة التي سترسم بها حدود الدوائر الانتخابية — باستثناء الأشكال السخيفة التي تلتفُّ حول وبين منازل المواطنين — ستظل نسبة الناخبين الجمهوريين في أي دائرة انتخابية هي الثلث تقريبًا. وسوف يفوز الديمقراطيون بكل المقاعد. وهذا بالضبط ما حدث.

في أحد الانتخابات التي جرت بالفعل على أرض الواقع، أوضح علماء الرياضيات أن هذا النوع من التأثير يمكن أن يكون لا مفرَّ منه، بغضِّ النظر عن الطريقة التي جرى بها ترسيم حدود الدوائر الانتخابية؛ على الأقل، دون تقسيم المدن. في عام ٢٠٠٦، تنافس كينيث تشيس مع إدوارد كينيدي على مقعد لمجلس الشيوخ الأمريكي، عندما قُسمت ماساتشوستس إلى تسع دوائر انتخابية من أجل انتخابات الكونجرس. وقد حصل تشيس على ٣٠٪ من إجمالي عدد الأصوات، لكنه خسر في جميع الدوائر التسع. أظهر تحليل الاحتمالات بواسطة الكمبيوتر أنه لا توجد أي طريقة لترسيم حدود دائرة انتخابية مكوَّنة من مجموعة من المدن، حتى لو جرى توزيعها بشكل غير منتظم عبر الولاية، كانت من الممكن أن تمنح تشيس الفوز. لقد جرى توزيع مؤيدي تشيس على نحو عادل ومتساوٍ في أغلب المدن؛ فلم يكن بالإمكان إجراء عملية تلاعب جيريماندري بإعادة ترسيم حدود الدوائر الانتخابية بأي شكل من الأشكال، كي تجعله يفوز.

وبالعودة إلى ولاية جيريمانديا، فقد اعترض الحزب الأبيض على عملية إعادة ترسيم الحدود هذه، عندما فاز الحزب الأسود بكل الدوائر الخمس، وقد استند في اعتراضه إلى أن الدوائر الانتخابية المستطيلة الشكل كانت رفيعة وطويلة للغاية، لذا من الواضح أن الحزب الأسود قد قام بعملية تفتيتٍ للأصوات. ومن ثَم قضت المحكمة بأن يُعاد ترسيم حدود الدوائر الانتخابية لتُصبح مدمَجة أكثر. فقدم الحزب الأبيض تصوُّرًا ضم ثلاث دوائر انتخابية مدمجة، وعرض بسخاء أن يترك للحزب الأسود اختيار تصوُّرٍ لإعادة ترسيم حدود ما تبقى في دائرتين أخريين. اعترض الحزب الأسود؛ لأن هذا التصور منح ثلاث دوائر للحزب الأبيض وترك له اثنتين فقط، على الرغم من أن الحزب الأسود لديه النسبة الأكبر من إجمالي عدد الأصوات في الدوائر الخمس.

يكشف هذا التقسيم عن عَيبَين من العيوب الأخرى في استخدام الدمج لاكتشاف عمليات التلاعُب الجيريماندري. فعلى الرغم من أنه من المفترض أن عملية إعادة الترسيم هذه تتَّسم بأنها مدمجة — حتى الآن — فلقد منحت الفوز للحزب الأبيض في ثلاث دوائر من أصل خمس؛ رغم أن لديه نسبة اثنين إلى خمسة من إجمالي عدد الأصوات في الدوائر



الشكل الأيمن: اقتراح الحزب الأبيض، الذي يتضمن ترك دائرتين انتخابيَّتين للحزب الأسود كي يحددهما. الشكل الأيسر: أكثر الاختيارات المدمَجة التي يمكنه التوصُّل إليها.

الخمس. وعلاوة على ذلك، لا توجد طريقة لإعادة تقسيم ما تبقَّى من مناطق في دائرتين انتخابيَّتين مدمَجتين. إذ إن الطبيعة الجغرافية في الولاية تجعل من الصعب تحقيق الدمج والعدالة في الوقت نفسه. بل ربما هو أمر مستحيل، عند أخذ تعريف الأمرين في الاعتبار.

نظرًا لوجود مشاكل في الاعتماد على الدمج في اكتشاف التلاعُب على أساسٍ حِزبي في عملية إعادة ترسيم الدوائر الانتخابية، فما الطرق الأخرى التي يمكننا استخدامها في هذا الإطار؟ إن تحليل بيانات التصويت يوضح النتيجة الفِعلية للانتخابات، كما يوضح أيضًا ماذا كانت ستصبح تلك النتيجة إذا تغيَّر عدد الأصوات التي فاز بها كل حزب بمقادير محددة. على سبيل المثال، إذا حصل الحزب الأسود في إحدى الدوائر على ٦ آلاف صوت، وحصل الحزب الأبيض على ٤ آلاف صوت، سيفوز الحزب الأسود بهذه الدائرة. إذا قرر ٥٠٠ ناخب التخلِّي عن تأييد الحزب الأسود ومنحوا أصواتهم للحزب الأبيض، سيظل الحزب الأسود فائزًا بهذه الدائرة، ولكن إذا تخلى ١٠٠١ ناخب عن تأييد الحزب الأسود ومنحوا أصواتهم للحزب الأبيض، فسيخسر الحزب الأسود. بدلًا من ذلك، إذا كان الحزب الأسود قد حصل على ٥٥٠٠ صوت، وحصل الحزب الأبيض على ٤٥٠٠ صوت، فإن الأمر سيستلزم تخلي ٥٠١ ناخب فقط عن تأييد الحزب الأسود، كي يحدث تغير في النتيجة. باختصار، إن عدد الأصوات التي حصل عليها كل حزب في إحدى الدوائر يوضح لنا من فاز بهذه الدائرة، كما يوضح لنا مدى تقارب النتيجة.

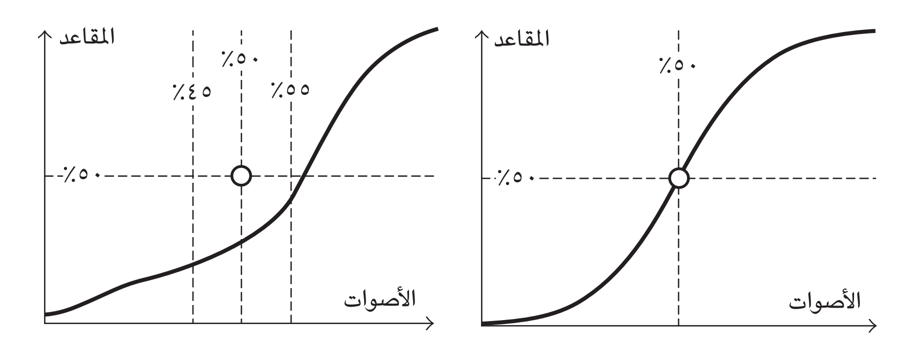
يمكننا إجراء هذا الحساب لكل دائرة انتخابية، وتجميع النتائج لمعرفة كيف سيختلف عدد المقاعد مع التغيُّر في عدد الأصوات، كي نتمكن من رسم منحنًى يوضح العلاقة الرياضية بين عدد الأصوات وعدد المقاعد. (إنه في الواقع على شكل مُضلَّع، مع

الكثير من الحواف المستقيمة، ولكن تقليل حدة تلك الحواف وتحويله إلى منحنًى يجعل الشكل أكثر ملاءمة.) توضح الصورة اليُمنى من الشكل التالي على نحوٍ تقريبي كيف يجب أن يبدو هذا المنحنى عند تمثيله للبيانات الناتجة عن انتخابات لم يحدث خلالها تلاعب جيريماندري. على وجه التحديد، يجب أن يمُرَّ المنحنى بالنقطة التي تمثل نسبة ٥٠٪ من المقاعد عند حصول الحزبين المتنافسين على نسبة ٥٠ / ٥٠ من الأصوات، ويجب أن يصبح متماثلًا على جانبي هذه النقطة، عند تدويره بزاوية مقدارها ١٨٠ درجة.

توضح الصورة اليُسرى منحنى الأصوات والمقاعد لخريطةٍ استخدمت من أجل انتخابات الكونجرس في ولاية بنسلفانيا؛ حيث يمثل المحور الأفقي النسبة المئوية لعدد الأصوات التي حصل عليها الحزب الديمقراطي. وقد كان يتوجَّب على الديمقراطيين أن يحصلوا على نحو ٥٧٪ من عدد الأصوات كي يفوزوا بنسبة ٥٠٪ من المقاعد. وقد أُلغيت هذه الخريطة لاحقًا من قِبل الهيئة التشريعية للولاية.

في العديد من القضايا، رفضت المحكمة العليا للولايات المتحدة اتهاماتٍ بممارسة تلاعب جيريماندري بِناءً على هذا النوع من الحساب، ورفضت أيضًا دعاوى بِناءً على افتقار دوائر انتخابية لعنصر الدمج. ففي قضية «رابطة مواطني أمريكا اللاتينية المتَّحدين ضد بيري» عام ٢٠٠٦، حكمت بإعادة ترسيم حدود عدد قليل من الدوائر الانتخابية في ولاية تكساس، بسبب أن ترسيم حدود إحدى الدوائر جرى بما يناقض قانون حقوق التصويت. في الواقع، على الرغم من أن المحكمة العليا قد أعلنت أن ممارسة التلاعب الجيريماندري من أجل تحقيق مصالح حزبية هي أمر غير دستوري، فإنها لم تُصدر حتى الآن حُكمًا بإلغاء أي خريطة كاملة لترسيم حدود الدوائر الانتخابية.

أحد الأسباب الرئيسية التي ذكرتها المحكمة في حيثيات حكمها السلبي هو أن الطرق الرياضية، مثل منحنى الأصوات والمقاعد، تعتمد على افتراضات؛ أي، ما كان سيفعله الناخبون في ظروف مختلفة. قد يكون هذا منطقيًّا بالنسبة للمحامين، ولكن من الناحية الرياضية هو أمر غير منطقي؛ لأن المنحنى مستنتَج من بيانات التصويت الفعلية من خلال إجراءات محددة بدقة. إن حساب المنحنى لا يعتمد على ما كان يمكن أن يفعله أي ناخبٍ في الواقع. إن الأمر يشبه النظر إلى مباراة في كرة السلة نتيجتها ١٠١–٩٧، وتحديد أن مستوى الفريقين خلال المباراة لا بد أنه كان متقاربًا، في حين أن نتيجة ١٢٠–٤٥ تعني أن المستوى لم يكن كذلك. فأنت لا تقدم تنبؤات عما كان سيفعله اللاعبون إذا لعبوا بشكل أفضل أو أسوأ. لذلك يمكننا إضافة هذه الحالة إلى القائمة الطويلة وغير المحددة



التمثيل البياني للعلاقة الرياضية بين عدد الأصوات وعدد المقاعد. يوضح المحور الأُفقي النسبة المئوية لعدد الأصوات الخاصة بأحد الحزبين، وتمتد من ٣٠٪ إلى ٧٠٪. ويوضح المحور الرأسي النسبة المئوية لعدد المقاعد التي كان من الممكن أن يفوز بها عند حصوله على هذا العدد من الأصوات.

من الحالات التي لم يستطِع القانون أن يفهم فيها العمليات الرياضية الأساسية، أو حتى يمنحها التقدير الواجب. إن الطبيعة الافتراضية المزعومة لهذه الخوارزمية المبنية بأكملها على حقائق، توفر، بالطبع، العذر المثالي لعدم إلغاء خريطة تكساس بأكملها.

إن أفضل طريقة لمعالجة مشكلة الأحكام القضائية المثيرة للجدل هي عدم محاولة تثقيف القضاة، لذا فإن أولئك الذين يسعون لاستخدام أساليب رياضية للكشف عن ارتكاب تلاعب جيريماندري بحثوا عن تدابير أخرى لا يمكن التشكيك في فاعليتها من خلال أسباب زائفة. إن هذا النوع من التلاعب يجبر مؤيدي أحد الحزبين المتنافسين على إهدار العديد من أصواته. وبمجرد أن يصبح لدى مُرشحِّك أغلبية، فليس هناك أي تأثير للأصوات الإضافية على النتيجة. لذا جرى التوصُّل إلى أسلوب آخر لقياس مدى تحقيق العدالة عند ترسيم حدود الدوائر الانتخابية من عدمه، وهو مطالبة كلا الحزبين المتنافسين بإهدار نفس عدد الأصوات الانتخابية تقريبًا. ففي عام ٢٠١٥، قدَّم نيكولاس ستفانابولوس وإريك ميجي أحد الأساليب لقياس الأصوات المهدرة، وأطلقا عليه اسم «فجوة الكفاءة».[7] في قضية «جيل ضد وايتفورد» عام ٢٠١٦، أعلنت إحدى المحاكم في ويسكونسن أن خريطة دوائر انتخابات مجلس الولاية غير قانونية، وقد كان أسلوب فجوة الكفاءة محوريًّا في اتخاذ

هذا القرار. ولفهم كيفية حساب فجوة الكفاءة، دعنا نبسط الأمور ونستخدم مثالًا تجرى فيه الانتخابات بين اثنين فقط من المرشحين.

هناك طريقتان رئيسيَّتان لإهدار صوتك الانتخابي. يصبح الصوت مهدرًا عند الإدلاء به لصالح مرشح خاسر؛ لأن صوتك لم يؤثر في النتيجة النهائية. كما أن الأصوات الزائدة التي يُدلَى بها لصالح الفائز، بعد أن يحصل على ٥٠٪ من عدد الأصوات، هي أصوات مهدرة للسبب نفسه. تعتمد هاتان العبارتان على النتيجة الفعلية، وهما ينطبقان بعد انتهاء الانتخابات؛ حيث لا يمكنك التأكد من أن صوتك قد أُهدر إلا بعد أن تعرف النتيجة. فخلال الانتخابات العامة في المملكة المتحدة عام ٢٠٢٠، حصل مرشح حزب العمل في دائرتي الانتخابية على ١٩٥٤٤ صوتًا، وحصل مرشح حزب المحافظين على ١٩١٤٣. فاز حزب العمال بفارق ٤٠١ صوت، وكان إجمالي عدد أصوات الناخبين الذين أدلوا بأصواتهم لصالح كلا الحزبين ٣٨٦٨٧ صوتًا. إذا قرر ناخب واحد ألا يدلي بصوته، ستظل الأغلبية هي ٤٠٠. ولكن إذا قرر ما يزيد قليلًا عن نسبة ١٪ من الناخبين المؤيدين لحزب العمل ألا يدلوا بأصواتهم، كان مرشح حزب المحافظين سيفوز.

وَفقًا لتعريف الأصوات المهدرة، فقد أهدر ناخبو حزب المحافظين ما مجموعه ١٩١٤٣ صوتًا، وأهدر ناخبو حزب العمل ٢٠٠ صوت. يقيس أسلوب فجوة الكفاءة مدى إجبار أحد الحزبين على إهدار عدد أصوات أكثر من الآخر. في هذه الحالة، سنستخدم الصيغة التالية:

عدد الأصوات المهدَرة من جانب حزب المحافظين

–

عدد الأصوات المهدَرة من جانب حزب العُمَّال

÷

إجمالي عدد الأصوات.

أي، (١٩١٤٣ – ٢٠٠)/٣٨٦٨٧ ما يساوي +٤٩٪.

هذه مجرد دائرة واحدة. والفكرة هي حساب فجوة الكفاءة لجميع الدوائر الانتخابية مجتمعة، ثم الاستعانة بمشرِّعي القوانين لتحديد حدٍّ قانوني. تقع قيمة فجوة الكفاءة دائمًا بين –٥٠٪ و+٥٠٪، وعندما تصبح قيمة الفجوة صفرًا فهي تشير إلى عملية انتخابية عادلة؛ حيث يهدر الطرفان نفس عدد الأصوات، لذلك اقترح ستفانابولوس وميجي أن

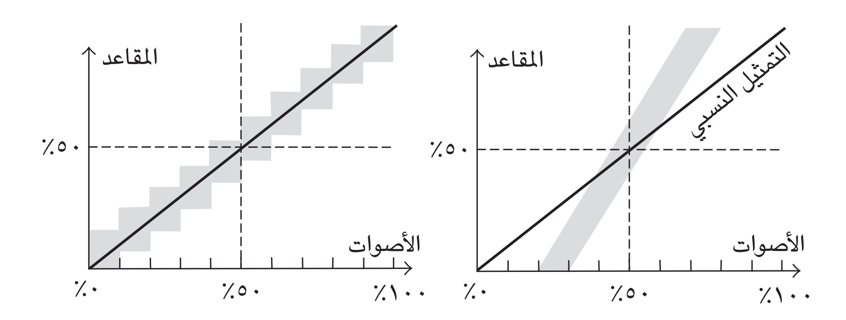
قيمة فجوة الكفاءة إذا وقعت خارج النطاق ±٨٪ فهي تدل على حدوث عملية تلاعب جيريماندري.

ورغم ذلك، هناك بعض العيوب في هذا الأسلوب. إذ إنه عندما تصبح النتيجة متقاربة، تنتُج قيمة كبيرة لفجوة الكفاءة على نحوٍ حتمي، ويمكن لعدد قليل من الأصوات أن يجعلها تتأرجح مما يقرُب من +٥٠٪ إلى ما يقرب من −٥٠٪. فعلى الرغم من أن قيمة فجوة الكفاءة كانت +٤٩٪ في دائرتي الانتخابية، فلم يحدث بها عملية تلاعب جيريماندري. إذا كان ٢٠١ ناخب فقط ممن أدلوا بأصواتهم لصالح حزب العُمال قد أدلوا بها لصالح حزب المحافظين بدلًا من ذلك، لأصبحت قيمة فجوة الكفاءة −٤٩٪. وإذا كان أحد الحزبين قد حالفه الحظ وفاز في كل الدوائر، سيبدو الأمر كما لو أنه قد فاز من خلال عملية تلاعب جيريماندري؛ إذ إن العوامل السكانية يمكن أن تشوِّه الأرقام. في قضية «جيل ضد وايتفورد»، كشف الدفاع هذه العيوب على نحو صائب، لكن المدعين جادلوا على نحوٍ ناجح بأنها لا تنطبق على هذه الحالة بالتحديد. ورغم ذلك، وكتعليق عام، فهي معقولة تمامًا.

في عام ٢٠١٥، رصدت ميرا بيرنستاين ومون دتشين[8] بعض العيوب الأخرى في أسلوب فجوة الكفاءة، وفي عام ٢٠١٨، اقترح جيفري بارتون تعديلًا لتلافي تلك العيوب.[9] لنفترض، على سبيل المثال، أن هناك ثماني دوائر انتخابية، وفي كل دائرة يحصل الحزب الأبيض على ٩٠ صوتًا، بينما يحصل الحزب الأسود على الأصوات المتبقية وهي ١٠. إذن عدد الأصوات المهدَرة بالنسبة للحزب الأبيض هي ٤٠ × ٨ ما يساوي ٣٢٠ صوتًا، في حين أن عدد الأصوات المهدَرة بالنسبة للحزب الأسود هي ١٠ × ٨ ما يساوي ٨٠ صوتًا، ومن ثَم فإن فجوة الكفاءة هي (٣٢٠ − ٨٠)/ ٨٠٠ ما يساوي ٠٫٣، أي، ٣٠٪. إذا اتبعنا اقتراح حد ٨٪، فإن حجم فجوة الكفاءة هذا يشير إلى وجود تحيُّز على أساس حزبي ضد الحزب الأبيض. لكن الحزب الأبيض فاز بجميع المقاعد الثمانية!

غير أن هناك سيناريو ثانيًا يكشف لنا أمرًا آخر. لنفترض الآن أن الحزب الأبيض قد فاز بثلاث دوائر، وحصل في كلٍّ منها على ٥١ صوتًا مقابل ٤٩، في حين فاز الحزب الأسود في دائرتين وحصل في كلٍّ منهما على ٥١ صوتًا مقابل ٤٩. إذن عدد الأصوات المهدَرة بالنسبة للحزب الأبيض هي ١ + ١ + ١ + ٤٩ + ٤٩ ما يساوي ١٠١ صوت، في حين أن عدد الأصوات المهدَرة بالنسبة للحزب الأسود هي ٤٩ + ٤٩ + ٤٩ + ١ + ١ ما يساوي ١٤٩. ومن ثَم فإن فجوة الكفاءة هي (١٠١ − ١٤٩)/ ٥٠٠ ما يساوي −٠٫٠٩٦،

أي –٩,٦٪، مما يشير إلى وجود تحيز ضد الحزب الأسود. رغم ذلك، فالحزب الأسود هو حزب الأقلية ويجب ألا يتوقع الفوز بأكثر من مقعدين، مثلما حدث بالفعل. ومَنح مقعد آخر للحزب الأسود من شأنه أن يمنح حزب الأقلية غالبية المقاعد.



الصورة اليمنى: رسم بياني خاص بالمقاعد وعدد الأصوات يوضح نتيجةَ استخدام أسلوب التمثيل النسبي (الخط السميك)، ونطاق قِيَم فجوة الكفاءة الذي يعتبر عادلًا (الجزء المظلل). الصورة اليسرى: الرسم البياني المقابل لفجوة الكفاءة المعدَّلة؛ حيث يحيط الجزء المظلل بالخط القُطري.

وقد تتبَّع بارتون هاتين المشكلتين المتعلقتين باستخدامات الأصوات المهدرة. في أي انتخابات، يعتبر فائض الأصوات التي حصل عليها الفائز أصواتًا مهدَرة، بغض النظر عن كيفية ترسيم حدود الدوائر. ومن ثَم استبدل بمصطلح «الأصوات المهدرة» مصطلح «الأصوات المهدَرة على نحوٍ غير ضروري»، مع حساب نِسَب الأصوات التي من المؤكد أنها ستصبح مهدرة، ذلك لكل حزب، وطرحها من التعريف السابق للأصوات المهدرة. عند استخدام التعريف الأصلي، يظهر في الرسم البياني الخاص بالمقاعد وعدد الأصوات نطاقٌ ضيق حول الخط الذي يبدأ بنسبة ٢٥٪ من عدد الأصوات في الأسفل، وينتهي بنسبة ٧٥٪ في الأعلى، كما هو موضَّح في الشكل التالي في الصورة اليُمنى. ومن أجل المقارنة، يوضح الخط القُطري شكل الرسم البياني المثالي الذي نحصل عليه عند استخدام أسلوب التمثيل النسبي. إذ يتقارب الاثنان عندما تنقسم الأصوات بنسبة قريبة للغاية من ٥٠ / ٥٠. أما في حالة الأصوات المهدرة على نحو غير ضروري، فنحصل على الرسم البياني المقابل الموجود

على اليسار. وهنا، يحيط الرسم البياني على نحو قريب للغاية بالخط القُطري، وهو ما يُعَد أكثر معقولية.

هناك أيضًا طريقة مختلفة لاكتشاف حدوث تلاعب جيريماندري، وهي استخدام خرائط ترسيم حدودٍ بديلة ومقارنة النتائج المحتملة، مع استخدام بيانات أنماط التصويت المحتملة في جميع أنحاء المنطقة التي يُعاد ترسيم حدود دوائرها. إذا كانت الخريطة التي يقترحها الحزب الأسود تشير إلى حصوله على ٧٠٪ من المقاعد، ولكن معظم الخرائط البديلة تشير إلى حصوله على ٤٥٪ فقط، فإن هذا الحزب يسعى إلى ارتكاب تلاعُب.

المشكلة الرئيسية في هذه الفكرة هي أنه حتى بالنسبة للأعداد الواقعية من الدوائر والتقسيمات الفرعية، لا يمكن تحديد جميع الخرائط الممكنة. فهناك انفجار توافيقي؛ حيث تزداد الأعداد بسرعة متناهية. علاوة على ذلك، يجب أن تلتزم جميع الخرائط المستخدَمة بالقواعد القانونية، مما يؤدي إلى قيود يمكن أن تصبح مستعصية رياضيًّا. وقد تصادف، على نحو مثير للدهشة، أن علماء الرياضيات توصلوا منذ مدة طويلة إلى طريقةٍ لتفادي حدوث هذا الانفجار التوافيقي، وهي طريقة «سلسلة ماركوف مونت كارلو». فبدلًا من استعراض كل خريطة ممكنة، تنشئ تلك الطريقة عينة عشوائية من الخرائط، التي تكون كبيرة بما يكفي لتقديم تقديرات دقيقة. إن هذه الطريقة مشابهة للطريقة التي من خلالها تتوقع استطلاعات الرأي العام نوايا الناخبين عبر سؤال عينة عشوائية صغيرة نسبيًّا.

تعود أساليب مونت كارلو إلى مشروع مانهاتن في زمن الحرب العالمية الثانية، الذي كان موجهًا لصناعة قنبلة ذرية. كان أحد علماء الرياضيات ويدعى ستانيسواف أولام مريضًا، ثم تماثل للشفاء وتقرَّر أن يقضي فترةً للنقاهة. وكي لا يشعر بالملل خلال هذه الفترة، أمضى وقته في ممارسة لعبة السوليتير. وبينما هو يتساءل عن احتمالات النجاح، حاول توقُّع عدد ترتيبات أوراق اللعِب التي ستؤدي إلى النجاح بأقل عدد من الخطوات، وأدرك بسرعة أن هذا النهج لن يصل به إلى أي نتيجة. بدلًا من ذلك، لعب عددًا كبيرًا من المرات، وأحصى عدد المرات التي فاز فيها. ثم أدرك أن بإمكانه إجراء حيلة مماثلة مع معادلات الفيزياء التي يحتاج مشروع مانهاتن إلى إيجاد حل لها.

أما سلاسل ماركوف، التي سُمِّيت على اسم عالم الرياضيات الروسي أندريه ماركوف، فهي تعميمات لخصائص طريقة المشي العشوائي (أو مشي الشخص السِّكِّير). افترض أن

شخصًا يمر بحالة نفسية سيئة قد أفرط في شرب الخمر حتى وصل إلى مرحلة السُّكر، ومن ثَم سيمشي وهو يترنَّح عبر الرصيف، ويتخذ خطواتٍ للأمام أو للخلف على نحوٍ عشوائي. في المتوسط، بعد عددٍ معين من الخطوات، ما المسافة التي سيقطعها؟ (الإجابة: في المتوسط، ما يقارب الجذر التربيعي لعدد الخطوات.) وقد تخيل ماركوف عمليةً مماثلة يستبدل فيها بالرصيف شبكةً، ويُعين للانتقالات عبر حواف الشبكة احتمالات محددة. وهنا يبرز سؤال رئيسي، وهو: ما احتمالية الوجود في أي موضع محدَّد، بعد التجوُّل بلا هدف لمدة طويلة للغاية؟ تشكل سلاسل ماركوف نموذجًا للعديد من مسائل العالم الحقيقي التي تحدث فيها تتابعات من الأحداث، مع تعيين احتمالات تتوقف على الظروف الحالية.

إن طريقة «سلسلة ماركوف مونت كارلو» هي ما نحصل عليه عند المزج بين الأسلوبين: استخدام أساليب مونت كارلو لأخذ عينات لقائمة الاحتمالات المطلوبة. في عام ٢٠٠٩، قدَّر عالم الإحصاء بيرسي دياكونيس أن نحو ١٥٪ من التحليلات الإحصائية في المجال العلمي، والأعمال الهندسية، والأعمال التجارية، تعتمد على طريقة «سلسلة ماركوف مونت كارلو»، لذلك فمن المنطقي تجربة مثل هذه الطريقة القوية والراسخة والمفيدة في كشف عمليات التلاعب الجيريماندري. استخدِم جَولات المشي العشوائي على غرار أسلوب ماركوف لإنشاء خرائط ترسيم الدوائر الانتخابية، واحصل على عينات منها باستخدام أسلوب مونت كارلو، وعندئذٍ ستصبح لديك طريقة إحصائية لتقييم مدى نموذجية الخريطة المقترحة. هناك بعض العمليات الرياضية الأكثر تعقيدًا التي تدعم هذه الأساليب، وهي المعروفة باسم النظرية الإرجوية، التي توفِّر ضمانًا بأن جولات المشي العشوائي الطويلة على نحو كافٍ تصلح لأخذ عينات من أجل الحصول على تقديرات إحصائية دقيقة.

وقد أدلى بعض علماء الرياضيات مؤخرًا بشهاداتهم أمام المحاكم حول هذه الطريقة. ففي ولاية نورث كارولينا، قارن جوناثان ماتينجلي بين تقديرات هذه الطريقة فيما يتعلق بالنطاق المعقول للكميات، مثل عدد المقاعد التي يجري الفوز بها، كي يثبت أن الخطة التي اختيرت كانت مبنية على قيمٍ إحصائية متطرفة، مما يشير إلى أنها متحيزة لصالح حزبٍ بعينه. وفي ولاية بنسلفانيا، استخدم ويسلي بيجدن أساليب إحصائية لحساب كيف أنه من غير المحتمل أن تؤدي خطةً محايدة سياسيًّا إلى نتائج أسوأ من الخطط التي أُنشئت بِناءً على أسلوب المشي العشوائي، ولتقدير احتمالية حدوث مثل هذه النتيجة بالصدفة البحتة. في كلتا الحالتين، وجد القضاة أن الإثباتات الرياضية ذات مصداقية.

إن الفهم الرياضي لعملية التلاعب الجيريماندري سلاح ذو حدين. إذ يمكن أن يساعد الناخبين والمحاكم على اكتشاف التلاعُب عند حدوثه، ولكن يمكن أيضًا أن يساعد المتلاعبين على التوصُّل إلى طرقٍ أكثر فعالية لارتكاب هذا النوع من التلاعب. إنه يساعدنا على جعل الناس يمتثلون للقانون، ولكنه يمكن أن يساعدهم أيضًا على خرقه، أو، ربما أسوأ من ذلك: التحايل عليه. فمن المعتاد أنه عند سَن إجراءات تنظيمية من أجل منع نوع ما من إساءة الاستخدام، فإن الناس يحاولون التحايل على النظام والبحث عن ثغرات في تلك الإجراءات. إن الميزة الكبرى للنهج الرياضي هي أنه يجعل القواعد في حد ذاتها واضحة. كما أنه يُبرز احتمالية جديدة بالكامل. وبدلًا من بذل محاولات غير ذات جدوى لإقناع ذوي المصالح السياسية المتنافسة بأن يتفقوا على ما هو عادل، ومنحهم فُرصًا للتلاعب بالنظام، وشرعنة النظام من خلال المحاكم، قد يكون من المنطقي أكثر أن نجعلهم يجاهدون من أجل التوصل إلى ما هو عادل. ليس على نحوٍ فوضوي غير منظم؛ حيث يمنحهم النفوذ والمال مزايا ضخمة، ولكن من خلال إطار منظم يضمن، ليس فقط أن نحصل على نتيجة عادلة، وأن يعتبرها الجميع عادلة، ولكن أيضًا ألا يمكن للأحزاب المتنافسة تجنُّب قبول الاعتراف بأنها عادلة.

قد يبدو هذا مطلبًا مبالغًا فيه، ولكن ازدهر مؤخرًا فرع كامل من فروع الرياضيات مخصص لهذه الفكرة، وهو: نظرية التقسيم العادل. وهو يوضح لنا أن الأُطُر التي جرى تكوينها بعناية من أجل التفاوض يمكن أن تحقِّق ما قد يبدو في البداية مستحيلًا.

إن المثال الكلاسيكي، الذي ينبع منه كل شيء آخر، هو طفلان يتنازعان على كعكة. وتكمن المشكلة في كيفية تقسيمها بينهما، باستخدام بروتوكول — أي مجموعة من القواعد المحددة مسبقًا — عادل على نحو مثبت. يكمن الحل الكلاسيكي في الآتي: «أنا أقطع، وأنت تختار». فيُطلَب من الطفلة أليس أن تقطع الكعكة على نحو تعتبره قد جعل كلًّا من القطعتين ذات قيمة متساوية. ثم يُطلب من الطفل بوب اختيار واحدة من القطعتين. لا ينبغي أن يصبح لدى بوب أي اعتراضات؛ لأنه هو من اختار بين القطعتين. إذ كان بإمكانه اختيار القطعة الأخرى بدلًا من تلك التي اختارها. وكذلك لا ينبغي أن يصبح لدى أليس أي اعتراضات أيضًا: إذا ظنت أن بوب اختار القطعة الأكبر، فقد كان ينبغي عليها تقسيم الكعكة إلى نصفين متساويين في المقام الأول. إذا كانا منزعجين بشأن من سيبدأ العملية أولًا، فيمكن إجراء قرعة باستخدام قطعة نقود، لكن هذا ليس ضروريًّا في واقع الأمر.

نظرًا لسمات الطبيعة البشرية التي نعلم جميعًا ما هي عليه، فلا يمكننا أن نصبح متأكدين من أن الطفلين سيدركان مدى عدالة هذه الطريقة بعد تجربتها. عندما ذكرتُ هذه الطريقة في أحد المقالات، أرسل أحد القراء رسالة إليَّ وقال إنه قد جرَّبها على طفليه، فاشتكت أليس (ليس هذا اسمها الحقيقي) على الفور من أن بوب (ليس هذا اسمه) قد حصل على القطعة الكبرى. وعندما أشار والدها إلى أن هذا خطؤها؛ لأنها قسمت الكعكة على نحو سيئ، فإن الأمور لم تسِر على ما يُرام — فقد رأت أنه يلقي اللوم على الضحية — لذلك بدَّل والدها القطعتين بينها وبين أخيها. وكانت نتيجة ذلك هي فقط سماع صياحها وهي تشتكي: «لا تزال قطعة بوب أكبر من قطعتي!» لكن ينبغي أن يحوز هذا النوع من البروتوكول رضا السياسيين، أو على الأقل لا يمنحهم الفرصة للاعتراض، وبالتأكيد ينبغي أن يحظى بالقبول أمام أي محكمة. إذ يتعين على القاضي فقط التحقق من أن البروتوكول قد طُبق على نحو صحيح.

إن الميزة الرئيسية لهذا النوع من البروتوكول هي أنه بدلًا من محاولة القضاء على العداء المتبادل بين أليس وبوب، فإننا نستخدمه للوصول إلى نتيجة عادلة. لا تطلب منهما اللعب بشكل عادل، ولا تطلب منهما التعاون، ولا تقترح تعريفًا قانونيًّا مصطنَعًا لما تعنيه كلمة «عادل». فقط دعهما يعارض أحدهما الآخر ويلعبان اللعبة. بالطبع، يجب على أليس وبوب الاتفاق مسبقًا على اللعب وفقًا لتلك القواعد، لكن سيتعين عليهما الموافقة على شيء ما، والقواعد من الواضح أنها عادلة، لذلك من المحتمل ألَّا يحصلا على التعاطف أو الاهتمام الكافي إذا لم يمتثلا لقواعدها.

هناك ميزة مهمة لبروتوكول «أنا أقطع، وأنت تختار» وهي أنه لا يتضمن نوعًا من التقييم الخارجي لما تساويه قيمة قطعة الكعكة. فهو يستخدم تقييمات اللاعبين الشخصية لقيمتها. إنهما فقط بحاجة إلى أن يشعر كل منهما بالرضا عن أن حصته عادلة وفقًا لمعاييره الخاصة. وعلى وجه التحديد، هما لا يحتاجان إلى الموافقة على قيمة أي شيء. في الواقع، يصبح التقسيم العادل أكثر سهولة لو كان هذا هو الوضع. فأحدهما يريد القطعة التي فوقها حبَّة الكرز، والآخر يريد تلك التي عليها طبقة الكريمة، ولا يمثل باقي مكونات الكعكة أي فارق لكليهما؛ إذن أُنجزت المهمة بنجاح.

لقد ظهرت جوانب خفية هامة، عندما بدأ علماء الرياضيات وعلماء الاجتماع في أخذ هذا النوع من المسائل على محمل الجد. وجاءت أول خطوة للبحث في هذا الأمر عندما فكروا في كيفية تقسيم الكعكة بين ثلاثة أشخاص. من الصعب هنا العثور على

إجابة بسيطة، وهناك أيضًا متغيِّر جديد في العملية. فعند تقسيم الكعكة بين أليس وبوب وتشارلي، يمكن أن يُقر كلٌّ منهم بأن النتيجة عادلة، على أساس أنه قد حصل على ثلث الكعكة على الأقل من خلال تقييمه الخاص، ولكن ربما لا تزال أليس تحسد بوب؛ لأنها تظن أن قطعة بوب أكبر من قطعتها. ويجب أن تعوض قطعة تشارلي عن هذا، من وجهة نظر أليس، بأن تصبح أصغر من قطعتها، ولكن لا يوجد أي تناقض في ذلك، لأنه يمكن أن يكون لدى كلٍّ من بوب وتشارلي أفكار مختلفة عن قيمة قطعته من وجهة نظره. لذلك من المنطقي البحث عن بروتوكول ليس عادلًا فحسب، ولكن أيضًا لا يتسبَّب في شعور أي طرف بالحسد تجاه طرف آخر. وفي الواقع، يمكن تحقيق ذلك.[10]

وقد شهدت تسعينيات القرن الماضي تقدمًا كبيرًا في فهمنا لعملية التقسيم العادل والخالي من الحسد، بدءًا بالتوصُّل إلى بروتوكول خالٍ من الحسد للتقسيم بين أربعة أشخاص، على يد ستيفن برامز وآلان تايلور.[11] إن الكعكة هي بالطبع مجرد رمز لأي شيء ذي قيمة يمكن تقسيمه. ومن ثَم تتعامل النظرية مع الأشياء التي يمكن تقسيمها بدقة حسبما نرغب (مثل الكعكة) أو التي تأتي في كتل منفصلة (مثل الكتب، والمجوهرات). وهذا يجعلها قابلة للتطبيق على المشكلات الحقيقية التي تحتاج إلى التقسيم العادل، وأوضح برامز وتايلور كيفية استخدام مثل هذه الأساليب لحل النزاعات في تسويات الطلاق. ويتمتع بروتوكول «الفائز المعدل» الذي توصلا إليه بثلاث مزايا رئيسية: إنه عادل، وخالٍ من الحسد، وفعَّال (أو مثالي وفقًا للرؤية الباريتوية). وهذا يعني، أن كل طرف يشعر أن حصته كبيرة، على الأقل مثل الحصة المتوسطة المتعارف عليها، ولا يشعر برغبة في تبادل حصته مع أي شخص آخر، ولا توجد طريقة أخرى للتقسيم تتصف، على الأقل، بأنها جيدة بالنسبة لكل الأطراف ومناسِبة أكثر بالنسبة لأي منهم.

في مفاوضات الطلاق، على سبيل المثال، قد يُستخدم هذا البروتوكول على هذا النحو. بعد تعرض علاقتهما لمشكلات معقدة طوال فترة طويلة، سئم كل من أليس وبوب من العيش معًا وقررا الطلاق. فمُنح كل منهما ١٠٠ نقطة، وهي التي سيقسمانها من خلال تخصيص عدد من النقاط لكل عنصر من الممتلكات مثل المنزل، والتليفزيون، والقط. مبدئيًّا، يُمنح العنصر لمن خصص له أكبر عدد من النقاط. هذا الأسلوب فعال، لكنه عادة ليس عادلًا ولا خاليًا من الحسد، لذلك ينتقل البروتوكول إلى المرحلة التالية. إذا تساوى الطرفان في قيمة ما حصلا عليه، سيصبحان راضيَين وتنتهي عملية التقسيم. إذا لم يكن الأمر كذلك، فلنفترض أن حصة أليس، وفقًا لقيمة ما حصلت عليه، أكبر من حصة بوب، وفقًا لما حصل عليه. لذا تُنقل عناصر من حصة أليس (الفائزة) إلى حصة بوب (الخاسر)

بترتيب يضمن تساوي قيمة ما حصل عليه كلٌّ منهما. ونظرًا لأن التقييمات لا يمكن أن تكون سوى أعداد صحيحة، وتكون العناصر غير قابلة للتقسيم، فقد يتوجب تقسيم أحد العناصر، لكن البروتوكول يشير إلى أن هذا سيحدث لعنصر واحد على الأكثر؛ وهو المنزل في أغلب الاحتمالات، الذي سيباع ثم يُقسم المقابل بينهما، ولكن ليس إذا اشترى بوب أسهمًا في شركة آبل قبل أن يرتفع سعرها في البورصة.

يستوفي بروتوكول «الفائز المعدل» ثلاثة شروط مهمة للتقسيم العادل. الأول أن به ضمانًا للعدالة؛ فهو يتسم على نحوٍ مثبت بالعدل والفعالية والخُلُو من الحسد. والثاني أنه يعمل من خلال التقييم متعدد الأطراف؛ إذ تؤخذ تفضيلات الأطراف في الاعتبار، وتُحسب قيم حصصها باستخدام التقييمات التي وضعوها. والثالث أنه عادل من الناحية الإجرائية؛ حيث يمكن للأطراف إدراك ضمانه للعدالة والتحقق منه، بالنسبة لأي حل يُتوصل إليه في النهاية، وإذا لزم الأمر، يمكن للمحكمة أن تقرر أنه عادل.

في عام ٢٠٠٩، اقترح زيف لانداو، وأونيل ريد، وإيلونا يرشوف أن نهجًا مشابهًا يمكن أن يقضي على مشكلة التلاعب الجيريماندري.[12] فالبروتوكول الذي يمنع أي مشارك من ترسيم الدوائر الانتخابية لصالحه، سيوقف عملية التلاعب هذه ويمنعها من تشويه الدوائر الانتخابية. لا تعطي هذه الطريقة أي اعتبار لشكل الخرائط، ولا تمنح القدرة للأطراف التي تزعم أنها حيادية، كي تفرض الخرائط التي تخدم مصالحها. بدلًا من ذلك، هي مصممة بحيث توازن بين المصالح المتنافسة.

والأفضل من ذلك أنه يمكن تعزيز هذه الأساليب لمراعاة عوامل إضافية مثل الدمج والتماسك الجغرافي. إذا طُلب من هيئة خارجية، مثل لجنة انتخابات أن تتخذ القرار النهائي، فيمكن تقديم نتائج لعبة التقسيم إليها كجزء من الدليل الذي ستبني عليه حكمها. لا أحد يدَّعي أن مثل هذه الأساليب ستزيل كل أثر للتحيز عند تطبيقها على أرض الواقع، لكنها تعمل بشكل أفضل بكثير من الأساليب الحالية، وتزيل إلى حد كبير إغراء الانغماس في ممارسات غير عادلة على نحو صارخ.

إن هذا البروتوكول، الذي هو معقد للغاية بحيث يصعب وصفه بالتفصيل، يتضمن طرفًا مستقلًّا يقترح طريقة لتقسيم الدوائر الانتخابية في الولاية. ثم يُعرض على الحزبين المتنافسين خيار تغيير الخريطة التي اقترحها هذا الطرف عن طريق إجراء تقسيم فرعي لإحدى الدوائر، بشرط أن يُسمح للحزب الآخر بتقسيم دائرة أخرى. وعلى نحو بديل،

يمكنهم انتقاء خيارٍ مشابه مع عكس دور كل طرف. إن هذا البروتوكول هو نسخة من بروتوكول «أنا أقطع، وأنت تختار»، مع تسلسلات أكثر تعقيدًا من التقسيمات. وقد أثبت لانداو، وريد، ويرشوف أن البروتوكول الذي توصلوا إليه يتسم بالعدالة من وجهة نظر الطرفين. إذ يلعب الطرفان، في الأساس، لعبة معًا. ولكن صُمِّمت اللعبة لتنتهي بالتعادل، مع اقتناع كل طرف بأنها قد مورست بأفضل شكل ممكن. وإذا لم يكن الأمر كذلك، فقد كان ينبغي أن يمارس اللعبة على نحو أفضل.

في عام ٢٠١٧، أجرى إريل بروكاتشيا وبيجدن تحسينات على هذا البروتوكول من خلال التخلُّص من الطرف المستقل؛ بحيث يصبح الحزبان المتنافسان هما من يقرران كل قواعد العملية. باختصار، يتولى أحد الحزبين السياسيين إعداد خريطة للولاية توضح عملية تقسيمها على نحو قانوني إلى العدد المطلوب من الدوائر الانتخابية، بحيث تضم كل دائرة نفس العدد من الناخبين (بقدر الإمكان). ثم «يجمد» الحزب الثاني دائرة واحدة؛ بحيث لا يمكن إجراء تغييرات أخرى عليها، ويعيد ترسيم حدود باقي الدوائر، كيفما شاء. ثم يختار الحزب الأول دائرة مختلفة من هذه الخريطة الجديدة ويجمدها ويعيد ترسيم البقية. ومن ثَم يتناوب الحزبان عمليتي التجميد وإعادة الترسيم، حتى يتجمدَ كل شيء. وينتج عن هذه العملية الخريطة النهائية التي توضح حدود الدوائر الانتخابية. إذا كان هناك، على سبيل المثال، ٢٠ دائرة انتخابية، فإن هذه العملية تُجرى عبر ١٩ دورة. وقد أثبت بروكاتشيا وبيجدن بالتعاون مع دينجلي يو، وهو طالب زائر يدرس علوم الكمبيوتر، باستخدام عمليات الرياضيات، أن هذا البروتوكول لا يمنح الحزب الذي بدأ التقسيم أي ميزة، وأنه لا يمكن للحزبين تركيز مجموعات محددة من الناخبين في نفس المنطقة إذا كان الحزب الآخر لا يريد حدوث ذلك.

أصبحت العمليات الرياضية للانتخابات، في هذه الأيام، مجالًا واسع النطاق للغاية، والتلاعب الجيريماندري في تقسيم الدوائر الانتخابية هو جانب واحد منها فقط. ولقد أُجري الكثير من الأبحاث على أنظمة تصويت مختلفة، مثل نظام الفوز للأكثر أصواتًا، ونظام التصويت الفردي القابل للتحويل، ونظام التمثيل النسبي، وما إلى ذلك. وإحدى السمات العامة التي تنبثق من هذا البحث تتمثل في أنه إذا حدد المرء قائمة مختصرة من الخصائص المرغوب فيها في أي نظام ديمقراطي مقبول، سيتضح أن هذه المتطلبات تتعارض في بعض الحالات بعضها مع البعض.

إن أصل كل هذه النتائج هي مبرهنة الاستحالة التي نشرها عالِم الاقتصاد كينيث أرو في عام ١٩٥٠، وشرحها في كتابه «الاختيار الاجتماعي والقيم الفردية» بعد ذلك بعام. درس أرو نظام تصويت مصنف، حيث يمنح كل ناخب تقييمات رقمية لسلسلة من الخيارات: ١ لتفضيله الأول، و٢ للتالي، وهكذا. ومن ثَم حدد ثلاثة معايير لعدالة نظام التصويت هذا:

- إذا فضل «كل» ناخب بديلًا عن آخر، فستفعل المجموعة ذلك.
- إذا لم يتغير تفضيل الناخب بين خيارين محددين، فلن يتغير تفضيل المجموعة أيضًا، حتى إذا تغيرت التفضيلات بين الخيارات الأخرى.
- لا يوجد ديكتاتور يمكنه دائمًا تحديد الخيار الذي تفضله المجموعة.

كل هذه المعايير مرغوب فيها للغاية، ولكنها متناقضة على نحو منطقي، وهو ما شرع أرو في إثباته. إن هذا لا يعني أن مثل هذا النظام غير عادل بالضرورة؛ كل ما في الأمر أنه في بعض الحالات تصبح النتيجة غير متوقعة.

إن التلاعب الجيريماندري له الصور الخاصة به من مبرهَنَة أرو. تحدد إحداها، وهي التي نشرها بوريس أليكسيف وداستن ميكسون[13] في عام ٢٠١٨، ثلاثة مبادئ لترسيم الدوائر الانتخابية على نحو عادل:

- نظام «رجل واحد، صوت واحد»: لكل دائرة نفس العدد من الناخبين تقريبًا.
- الدمج باستخدام مقياس بولسبي-بوبر: كل الدوائر لديها درجة مقياس بولسبي-بوبر أكبر من القيمة المحددة قانونًا.
- فجوة الكفاءة المقيدة: وهذا أمر تقني على نحو أكبر. تقريبًا، إذا كان عدد سكان أي دائرتين يمثل على الأكثر نسبة ثابتة من إجمالي عدد السكان في هاتين الدائرتين، فإن فجوة الكفاءة تكون أقل من ٥٠٪.

ثم أثبتا بعد ذلك أنه لا يوجد نظام تقسيم دوائر انتخابية يمكنه دائمًا استيفاء هذه المعايير الثلاثة.

إن الديمقراطية لا يمكنها أبدًا أن تصل إلى حد الكمال. في الواقع، إنه لأمر مدهش أنها قابلة للتطبيق من الأساس، نظرًا لأن الهدف هو إقناع ملايين الأشخاص، الذين لكل منهم آراؤه الخاصة، كي يتفقوا على شيء مهم يؤثر على كل واحد منهم. إن الديكتاتوريات أبسط بكثير. دكتاتور واحد، صوت واحد.

الفصل الثالث

دع الحمامة تقود الحافلة!

من ناحية، ربما شعر سائق الحافلة بالقلق من أن الحمامة لن تتمكن من قيادة الحافلة على نحو آمن. وربما، من الناحية الأخرى، شعر السائق بقلق أكبر من أن الحمامة لن تتمكن من اتِّباع مسارٍ يعطي، على نحو فعَّال، فرصة ركوب الحافلة لجميع الركاب الموجودين في المحطات المختلفة عبر المدينة.

بريت جيبسون، وماثيو ويلكينسون، وديبي كيلي،
دورية «أنيمال كوجنيشن»

لقد بدأ مو ويليمس في رسم الرسوم المتحركة في سن الثالثة. وبعد ذلك قرر كتابة قصصٍ مضحكة؛ حيث ساوره القلق من أن الكبار ربما يمتدحونه على نحوٍ تشوبه المجاملة. فالضحكات المصطَنَعة، هكذا قال لنفسه، يمكن اكتشافها بسهولة أكبر. وفي عام ١٩٩٣ انضم إلى فريق الكتابة وتحريك الرسوم في البرنامج التليفزيوني الشهير «سيسمي ستريت»، وفاز بست جوائز «إيمي» في غضون عشر سنوات. كما صنع مسلسل رسوم متحركة تليفزيوني للأطفال بعنوان «خروف في المدينة الكبيرة»، قدَّم فيه شخصية الخروف الذي تحطَّمت حياته الهانئة في المزرعة، عندما أرادت المنظمة العسكرية السرية التابعة للجنرال سبسيفك السيطرة عليه من أجل الاستفادة منه في تصنيع مسدس إشعاعي يستمد طاقته من الخرفان. ثم واصل خلال غزوتهمدينة ألمانية مذكورة في الكتاب الإرشادي الأولى لعالم كتب الأطفال الاعتماد على شخصيات من الحيوانات، عندما قدم كتابًا بعنوان «لا تدع الحمامة تقود الحافلة!»، وفاز بميدالية «كارنيجي» عن فيلم الرسوم المتحركة المقتبَس منه، وتكريم «كولديكوت»، الذي تحصُل عليه إذا وصلتَ إلى

القائمة المختصرة من المرشحين للحصول على ميدالية «كولديكوت». وفي هذا الكتاب تستخدم الشخصية الرئيسية — التي من الواضح أنها حمامة — كل الحِيَل الممكنة (حرفيًّا) لإقناع القارئ بأنه ينبغي السماح لها بقيادة حافلة عندما اضطرَّ السائق البشري العادي إلى المغادرة على نحو مفاجئ.

في عام ٢٠١٢، كان لكتاب ويليمس تبِعات علمية غير مقصودة، عندما نشرت الدورية العلمية المرموقة «أنيمال كوجنيشن» ورقة بحثية مرموقة للغاية من قِبل الباحثين المرموقين للغاية بريت جيبسون وماثيو ويلكينسون وديبي كيلي. أثبتوا فيها تجريبيًّا أن الحمام يمكنه إيجاد حلول، قريبة من المثلى، لحالات بسيطة من إحدى المسائل الرياضية الشهيرة، وهي «مسألة البائع المتجول». ووضعوا لبحثهم عنوانَ «دع الحمامة تقود الحافلة: يمكن للحمام أن يخطط مساراتٍ مستقبلية داخل غرفة».[1]

لا ينبغي لأحد أن يدعي أن العلماء يفتقرون إلى روح الدعابة. أو أن العناوين اللطيفة لا تساعد في صنع دعاية جيدة لما توصَّلوا إليه.

إن مسألة البائع المتجول ليست فقط مسألة مثيرة للفضول. إنها مثال مهم للغاية على فئة من المسائل ذات أهمية عملية هائلة، تُسمى التحسين التوافقي. فعلماء الرياضيات لديهم عادةً طرح أسئلة عميقة وهامة ذات صلة بأمور تبدو تافهة كهذه. لقد شجب أعضاء الكونجرس الأمريكي إهدار المال العام على نظرية العقدة، غير مدركين أن هذا المجال أساسي بالنسبة للطوبولوجيا المنخفضة الأبعاد، مع تطبيقات على الحمض النووي ونظرية الكم. وتتضمن التقنيات الأساسية في الطوبولوجيا مبرهَنَة الكرة ذات الشعر ومبرهنة شطيرة لحم الخنزير؛ لذلك أفترض أننا نسأل عن عدم إدراك الناس لأهمية نظرياتنا، لكن لسنا نحن فقط. أنا لا أمانع في عدم المعرفة بها — إذ يمكن أن يحدث ذلك لأي شخص — ولكن لماذا فقط لا يسأل هؤلاء الأشخاص عنها ليدركوا أهميتها؟[2]

على أي حال، فإن القصة التافهة للغاية التي ألهمتني كتابةَ هذا الفصل تعود أصولها إلى كتاب مفيد بالنسبة — كما لعلك قد خمنت — للبائعين المتجوِّلين. إنهم مندوبو المبيعات المتنقلون. أنا أستطيع أن أتذكرهم حتى لو لم تفعل أنت. غالبًا ما كانوا يبيعون المكانس الكهربائية. ولكن دعنا نعُد إلى عام ١٨٣٢، وبالتحديد في ألمانيا؛ حيث كان البائع الألماني المتجول (في تلك الأيام كان الرجال هم فقط من يعملون بتلك المهنة) يعتبر أن أهم عنصرين في مهنته هما الاستفادة من وقت العمل على نحو فعَّال، وكذلك خفض التكاليف، مثله في ذلك مثل أي شخص حصيف يعمل بالتجارة. ولحسن حظ الباعة الألمان في ذلك الوقت، أنهم وجدوا على نحو سريع ما يساعدهم في تحقيق هذا الأمر،

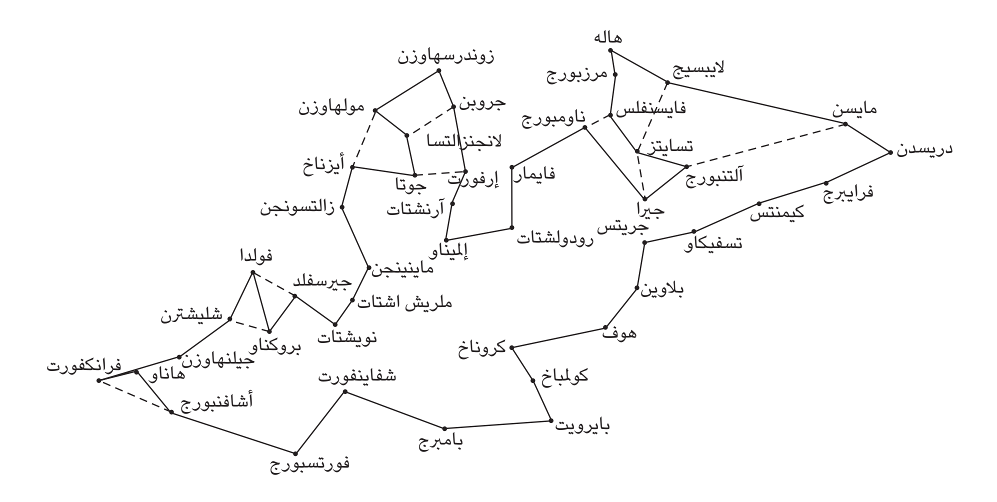
عندما صدر كتاب إرشادي بعنوان: «البائع المتجول؛ كيف ينبغي أن يكون وماذا عليه أن يفعل، للحصول على طلبات الشراء، وللتأكد من تحقيق نجاح مبهر في عمله، بقلم بائع متجول مخضرم». أشار هذا البائع المتجول العجوز إلى ما يلي:

> إن طبيعة عمل البائع المتجول تقوم على التنقل من مكان لآخر، ولا يمكن على نحو دقيق تحديد مسارات تنقل بعينها تناسب جميع الحالات التي تحدث؛ ولكن في بعض الأحيان، من خلال الاختيار والترتيب المناسبَين للجولة، يمكن كسب الكثير من الوقت، ولذلك نحن نظن أنه بإمكاننا تقديم بعض القواعد أيضًا في هذا الصدد … والنقطة الأساسية دائمًا تتمثل في زيارة أكبر عدد ممكن من الأماكن، دون الاضطرار إلى زيارة نفس المكان مرتين.

لم يقدم الكتاب الإرشادي أي عمليات رياضية لحل هذه المسألة، لكنه احتوى على أمثلة لخمس جولات مثالية، على حد زعمه، عبر مدن ألمانيا (إحدى تلك الجولات مرت بسويسرا). ويشتمل معظمها على جولات فرعية تزور نفس المكان مرتين، وهو أمر عملي تمامًا، إذا كنت تقضي النهار في زيارة المنطقة المحلية وتبيت الليل في فندق صغير. لكن إحدى الجولات لم تحدث خلالها زيارة نفس المكان مرتين. وقد أظهر حلٌّ حديث لنفس المسألة أن الحل الذي ورد في هذا الكتاب الإرشادي هو حل جيدٌ للغاية، مثلما توضح الصورة.

إن المسألة الشهيرة التي عُرفت باسم مسألة البائع المتجول هي مثال رائد للمجال الرياضي الذي يُعرف الآن بالتحسين التوافقي. وهذا يعني «إيجاد أفضل خيار من بين مجموعة من الاحتمالات الكثيرة للغاية التي لا يمكن التحقُّق من كلٍّ منها على حدة». من الغريب، أن اسم هذه المسألة يبدو أنه لم يُستخدم بشكل صريح في أي منشور ذي صلة بهذه المسألة حتى عام ١٩٨٤، رغم أنه كان يستخدم على نحو شائع قبل ذلك بكثير في المناقشات غير الرسمية بين علماء الرياضيات.

وعند الحديث عن مسألة لها مثل هذه الأصول العملية، يمكن القول إن مسألة البائع المتجول قد وضعت مجتمع الرياضيات في موقف صعب، وفي ذلك «مسألة جائزة الألفية» (هل $P \neq NP$؟) التي لا تزال جائزتها البالغة مليون دولار تنتظر من يحصل عليها. ويطرح هذا سؤالًا، على نحو تِقني دقيق، عما إذا كان بإمكان المرء دائمًا إيجاد الحل على نحو فعَّال، بخصوص مسألة يمكن، على نحو فعَّال، التحقق من حل مقترح — تخمين، إذا تحرينا الدقة — لها. يعتقد معظم علماء الرياضيات وعلماء الكمبيوتر أن الإجابة هي



جولة (طولها ١٢٨٥كم) عبر ٤٥ مدينة ألمانية مذكورة في الكتاب الإرشادي الذي صدر عام ١٨٣٢، وموضحة هنا بالخطوط غير المتقطعة (العريضة والرفيعة). بينما توضح الخطوط غير المتقطعة العريضة والخطوط المتقطعة أقصر جولة بين تلك المدن (وطولها ١٢٤٨كم) وهي التي توصَّلت إليها الأساليب الحديثة.

«لا»: بالتأكيد، يمكن إجراء عملية التحقق من أي تخمين معين على نحو أسرع بكثير من عملية إيجاد الإجابة الصحيحة. ففي النهاية، إذا عرض أمامك شخص ما لعبة بازل مكونة من ٥٠٠ قطعة بعد أن نجح في تجميعها، يمكن عبر نظرة فاحصة سريعة معرفة ما إذا كان قد جمعها على نحو صحيح؛ لكن تجميع القطع معًا أمرٌ مختلف تمامًا. لسوء الحظ، لا تقدم ألعاب البازل إجابة: إنها مجاز مفيد، لكن من الناحية التقنية لا تقدم حلًّا. ومن ثَم فإنه في الوقت الحالي، لا يمكن لأحد أن يثبت أو يدحض الاعتقاد بأن P تختلف عن NP، وهذا هو السبب في أن التوصل إلى حل لتلك المسألة سيجعلك تربح جائزة رائعة قيمتها مليون دولار.[3] سأعود لاحقًا إلى موضوع هل $P \neq NP$، ولكن أولًا دعنا نلقِ نظرة على المحاولات الأولى التي جرت من أجل التوصُّل إلى حل مسألة البائع المتجول.

لقد ولَّى عصر البائع المتجول الرجل منذ زمن بعيد، وتلاه، على نحو سريع، عصر البائع المتجول الذي يمكن أن يكون رجلًا أو امرأة. أما في عصرنا الحالي، عصر الإنترنت، فأصبح

من النادر أن تبيع الشركات منتجاتها من خلال إرسال شخص يتنقل بين البلدات وهو يحمل حقيبة مليئة بالعيِّنات. بدلًا من ذلك، هي تعرض كل منتجاتها على موقعها الخاص على الويب. ومثلما هو معتادٌ مع كل حالات الفعالية اللامعقولة، لم يتسبَّب تغيُّر الثقافة هذا في جعل مسألة البائع المتجوِّل أمرًا عفا عليه الزمن. إذ إنه مع النمو المذهل في مجال التسوق عبر الإنترنت، تصبح الحاجة إلى إيجاد طُرُق فعالة لتحديد مسارات التوصيل وجداوله الزمنية أكثرَ أهمية من أي وقتٍ مضى، بخصوص كل شيء، من الطرود إلى طلبات المراكز التجارية وحتى البيتزا. وربما ينبغي أن يتغير اسم المسألة إلى «مسألة التسوُّق في متاجر تيسكو: ما أفضل مسارٍ يمكن أن تسلكه سيارة توصيل الطلبات؟»

إن ميزة قابلية التطبيق المتعدد التي تتميز بها الرياضيات لها دور أيضًا في هذا الشأن. إن تطبيقات مسألة البائع المتجوِّل لا تقتصر على السفر بين البلدات أو التجوُّل عبر شوارع المدن. يوجد على جدار غرفة الجلوس في بيتي لوحة مربعة كبيرة من القماش الأسود، مطرَّزة عليها باللون الأزرق أشكالٌ مغزلية أنيقة استنادًا إلى أعداد فيبوناتشي الشهيرة، وقد استُخدم الترتر في عملية التطريز. ويطلق عليها المصمم اسم «ترتر فيبوناتشي». لقد صُنعت تلك اللوحة باستخدام ماكينة يجري التحكم فيها بالكمبيوتر، يمكنها تطريز أي قطعة قماشية بأحجام تصل إلى حجم مفرش سرير. وتتصل الإبرة التي تخيط الخيوط بقضيب، على نحو يسمح بأن تنزلق على امتداده، ويمكن للقضيب أن يتحرك بشكل عمودي على طولها. وبالجمع بين الحركتين، يمكن تحريك الإبرة إلى أي مكان نريده على سطح القطعة القماشية. ولأغراضٍ عمليةٍ (تقليل إهدار الوقت، والأحمال على الماكينة، والضوضاء) لا ينبغي أن نتركها تقفز في جميع أجزاء القطعة، لذلك يجب تقليل المسافة الإجمالية التي تقطعها الإبرة إلى الحد الأدنى. وهذا يشبه للغاية مسألة البائع المتجول. إن الجيل الأول الذي تنحدر منه هذه الماكينة يعود إلى الأيام الأولى التي ظهرت فيها التطبيقات المستخدمة في تصميم الرسومات باستخدام الكمبيوتر، وماكينة تعرف باسم الرسام ثنائي المحور، وتعمل عبر تحريك قلمٍ لتنفيذ الرسومات بالطريقة نفسها.

يزخر مجال العلوم بتطبيقات مماثلة. فمثلًا في مجال علم الفلك، كان علماء الفلك البارزون فيما مضى يمتلكون تلسكوبات خاصَّة بهم، أو يتشاركونها مع عدد قليل من الزملاء. وقد كان من الممكن إعادة توجيه التلسكوبات بسهولة من أجل رصد أجرامٍ سماوية جديدة، لذا كان الارتجال أمرًا سهلًا. لكنه لم يعُد كذلك في الوقت الحاضر؛ حيث

أصبحت التلسكوبات التي يستخدمها علماء الفلك ضخمة الحجم، وباهظة التكلفة للغاية، ويمكن استخدامها عبر الإنترنت. ومن ثَم يستغرق توجيه التلسكوب نحو جِرمٍ سماوي جديد وقتًا، وبينما يجري تحريك التلسكوب، لا يمكن استخدامه من أجل الرصد. وعند محاولة استكشاف الأجرام المستهدفة دون وضع ترتيب مناسب، فإن هذا يؤدي إلى هدر الكثير من الوقت في تحريك التلسكوب شوطًا طويلًا، ثم العودة مرة أخرى إلى مكانٍ ما بالقرب من المكان الذي بدأ فيه. وفي مجال تحديد تسلسلات الحمض النووي، يجب ربط التسلسلات المجزِّئة لقواعد الحمض النووي معًا على نحو صحيح، ويجب اختيار أفضل ترتيب ممكن لتنفيذ هذا، من أجل تجنُّب إهدار وقت الكمبيوتر المستخدم في العملية.

تتراوح التطبيقات الأخرى من توجيه الطائرات وتحديد مساراتها بكفاءة، إلى تصميم وتصنيع الرقائق الدقيقة للكمبيوتر ولوحات الدوائر الإلكترونية المطبوعة. كما استخدمت حلولٌ تقريبية لمسألة البائع المتجول لتحديد مساراتٍ فعَّالة لعمليات تسليم الطلبات في برنامج «وجبات على عجلات»، وتحديد أفضل وأسرع المسارات لتسليم عبوات الدم إلى المستشفيات. وحتى في مبادرة «حرب النجوم»، وهو الاسم الذي اشتهرت به مبادرة الدفاع الاستراتيجي الافتراضية التي أطلقها الرئيس رونالد ريجان، ظهرت نسخة من مسألة البائع المتجول؛ حيث ستُستهدف مجموعة صواريخ نووية معادية باستخدام مدفع ليزر قوي يتحرك في مدار فضائي حول الأرض.

يبدو أن كارل مينجر، الذي يُنظر إلى بعض أعماله الآن على أنها رائدة في هندسة الفراكتالات، كان أول عالم رياضيات يكتب عن مسألة البائع المتجول، وذلك في عام ١٩٣٠. لقد درس المسألة من زاوية مختلفة تمامًا؛ لقد كان يدرس أطوال المنحنيات من وجهة نظر الرياضيات البحتة. في ذلك الوقت، جرى تعريف طول المنحنى على أنه أكبر قيمة نحصل عليها من خلال جمع أطوال أضلاع أي مضلَّع يشبه على نحوٍ تقريبي ذلك المنحنى، الذي تكون رءوسه عبارة عن مجموعة محددة من النقاط الواقعة على المنحنى، التي جرى المرور بها بنفس الترتيب مثلما تقع على المنحنى. أثبت مينجر أنك ستحصل على نفس الناتج عند استبدال مجموعةٍ محددة من النقاط الواقعة على المنحنى بكل مُضلَّع، وإيجاد المسافة الإجمالية الأدنى على طول أي مضلع يضم تلك الرءوس، بالترتيب الذي تريده. إن الصلة بين هذا ومسألة البائع المتجول هي أن أقصر مسارٍ عند مينجر هو الحل المناسب لمسألة البائع المتجول عند النظر إلى رءوس المضلَّع باعتبارها بلدات. وقد

أطلق عليها مينجر «مسألة المرسال»، محاججًا بأنها تنطبق على ساعي البريد إلى جانب البائع المتجول، وكتب يقول:

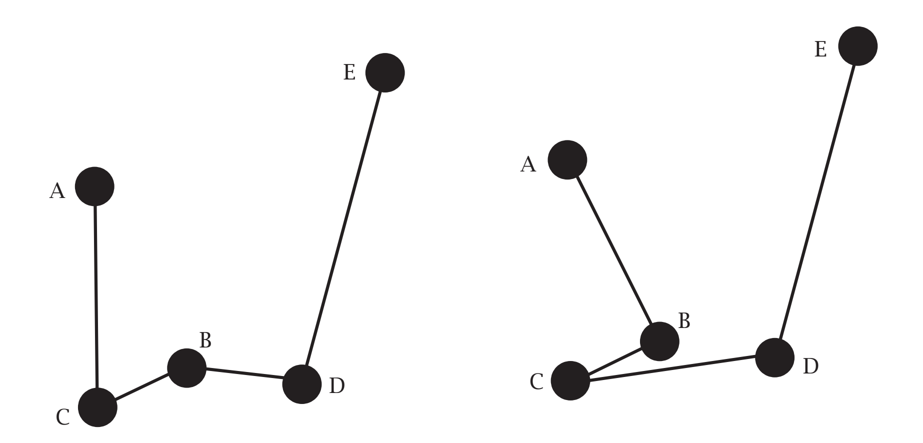
> إن هذه المسألة قابلة للحل من خلال عددٍ مُتَناهٍ من المحاولات. والقواعد التي من شأنها أن تجعل عدد المحاولات أقل من عدد تباديل النقاط المختارة؛ غير معروفة. إن القاعدة التي تنص على أن المرء يجب أن ينتقل أولًا من نقطة البداية إلى أقرب نقطة لها، ثم إلى النقطة الأقرب إلى سابقتها، وهكذا؛ لن تؤدي بشكل عام إلى الحصول على أقصر مسار.

يوضح هذا الاقتباس أنه قد فهِم سِمتَين رئيسيتين للمسألة. أولًا: توجد خوارزمية تساعدنا في التوصل إلى الحل. ما عليك سوى تجربة جميع مسارات التجوُّل على التوالي، وحساب المسافة المقطوعة في كل مسار، وتحديد أقصر مسار. إن العدد الإجمالي للجولات المحتملة هو بالضبط عدد تباديل النقاط، وهو عدد متناهٍ. خلال الحقبة التي كتب فيها مينجر هذا، لم تكن هناك خوارزمية أفضل من هذه معروفة ويمكن استخدامها، لكن تجربة كل الاحتمالات تصبح أمرًا شبه مستحيل إذا تجاوز عدد البلدات المطلوب تحديد مسارات التجول عبرها اثنتي عشرة أو نحو ذلك، لأن عدد المسارات سيصبح ضخمًا للغاية. ثانيًا: لقد توصل إلى أن الطريقة «البديهية» لتحديد المسار — من كل نقطة إلى أقرب نقطة مجاورة — ليست هي الطريقة الصحيحة في أغلب الأحوال. لقد أطلق الخبراء على هذه الطريقة اسم «طريقة أقرب جارٍ الاستكشافية». ويوضح الشكل التالي أحد أسباب فشلها.

لقد كان مينجر محاضرًا زائرًا في جامعة هارفرد لمدة ستة أشهر من عام ١٩٣٠ إلى عام ١٩٣١، وحضر عالم الطوبولوجيا الكبير هاسلر ويتني بعضًا من محاضراته، وقدَّم اقتراحات حول المسألة. وبعد مرور عام، ألقى ويتني محاضرة ذكر خلالها أنه قد توصل إلى أقصر مسار بين كل الولايات الأمريكية البالغة (في ذلك الوقت) ٤٨. وجرى تداول اسم «مسألة ٤٨ ولاية» لفترة من الزمن، ولا يبدو أن أحدًا يعرف على وجه اليقين من صاغ الاسم الأكثر شهرة «مسألة البائع المتجول». إذ كانت أول إشارة منشورة معروفة لهذا المسمَّى واردة في تقرير أعدته جوليا روبنسون صدر عام ١٩٤٩.

واصل مينجر عمله على مسألة البائع المتجول والأمور ذات الصلة. وفي عام ١٩٤٠، بحث لاسلو فييش توت تقريبًا نفس المسألة، وهي إيجاد أقصر مسار يمر بعدد n من النقاط في مربع الوحدة. وفي عام ١٩٥١، أثبت صامويل فيربلونسكي أن الحل هو مسار

طوله أقل من $\sqrt{2.8n} + 2$. وقد أثبت العديد من علماء الرياضيات مبرهَنَات أفضل قليلًا توضح أن أقل قيمة لطول مسارٍ يمر بعدد n من النقاط في منطقة ثابتة لا يزيد عن ثابتٍ ما مضروبًا في الجذر التربيعي لـ n، بالنسبة للثوابت التي تقل قيمتها في كل مرة.



أحد أسباب فشل طريقة أقرب جار الاستكشافية. عند البدء من البلدة A والانتقال دائمًا إلى أقرب بلدة من بين البلدات التي لم يزرها البائع بعد، يوضح الشكل الأيمن المسار ABCDE الذي يمر بالبلدات بحسب قربها من سابقتها. ويوضح الشكل الأيسر المسار ACBDE، الذي لا يلتزم بهذا الشرط، لكنه يقطع مسافة أقصر.

في أواخر الأربعينيات من القرن الماضي، كانت إحدى المؤسسات الرائدة في مجال بحوث العمليات هي مؤسسة راند في مدينة سانتا مونيكا، بولاية كاليفورنيا. وقد كان باحثو المؤسسة يجرون الكثير من الأبحاث على مسألة ذات صلة، وهي «مسألة النقل»، واقترح جورج دانتسيج وتيجالينج كوبمانس أن أبحاثهما على ما يُسمى الآن بالبرمجة الخطِّية قد يكون ذا صلة بمسألة البائع المتجول. فالبرمجة الخطية هي إطار عمل قوي وعملي للعديد من مشاكل التحسين التوافقي. وهي طريقة لتعظيم الوصول لبعض التوافيق الخطية من المتغيرات الخاضعة للمتباينات التي تنُص على أن بعض التوافيق الخطية الأخرى يجب أن تكون موجبة أو سالبة. وقد ابتكر دانتسيج أول خوارزمية عملية، وهي الطريقة المبسطة، التي لا تزال مستخدَمة على نطاق واسع. إذ تُحدد المتباينات شكلًا

متعدد السطوح محدَّب متعدد الأبعاد، وتحرك الخوارزمية نقطةً على طول حوافه التي تزيد من الكمية التي نريد تعظيمها، حتى تصبح غير قابلة للمزيد من التحريك.

لقد تحقق أول تقدُّم مهم على نحوٍ حقيقي في عملية إيجاد حل لمسألة البائع المتجول في عام ١٩٥٤، من خلال باحثي مؤسسة راند وهم دانتسيج وديلبرت فالكرسون وسيلمر جونسون، باستخدام طريقة البرمجة الخطية الخاصة بدانتسيج. إذ أجرَوا بعض المواءمات لتطبيقها على مسألة البائع المتجول، وقدَّموا طُرقًا جديدة منهجية، لا سيما استخدام «مستويات القطع». وكانت النتيجة هي التوصُّل إلى حد أقل لطول المسار الأمثل الذي يمكن استخدامه خلال الجولة. إذا كان بإمكانك إيجاد مسار جولة طوله أكبر قليلًا، فأنت على الطريق الصحيح، وفي هذه الحالة يمكن أحيانًا أن يقودك حَدسُك للوصول إلى المسار الأمثل. استخدم دانتسيج وفالكرسون وجونسون هذه الأفكار للوصول إلى أول حل لهذه المسألة مع عددٍ معقول من المدن، وعلى وجه التحديد أقصر مسار جولة عبر ٤٩ مدينة؛ واحدة في كل ولاية من الولايات الأمريكية البالغ عددها ٤٨، بالإضافة إلى واشنطن العاصمة. ربما تكون هذه هي المسألة التي ذكرها ويتني في ثلاثينيات القرن العشرين، وهي بالضبط تلك التي ذكرتها روبنسون في عام ١٩٤٩.

في عام ١٩٥٦، حاجج رائد أبحاث العمليات ميريل فلود في أن إيجاد حل لمسألة البائع المتجول هو أمر صعب على الأرجح. وهذا يثير سؤالًا رئيسيًّا، وهو: ما مدى صعوبة ذلك؟ للإجابة على هذا، يجب أن نتطرق مرة أخرى إلى P وNP، وهما مقياسَا التعقيد الحسابي اللذان سيحصل من يتوصل للعلاقة بينهما على جائزة المليون دولار. يبدو من المحتمل جدًّا أن رأي فلود هو الصواب، على نحو منطقي للغاية.

لطالما ظل علماء الرياضيات يراقبون مدى عملية طُرق حل المشكلات، على الرغم من أنهم، عندما تتأزم الأمور، يشعرون أن أي طريقة هي أفضل من لا شيء. ولأغراضٍ نظرية بحتة، فإن مجرد القدرة على إثبات وجود حل لمشكلة ما يمكن أن يمثل خطوة كبيرة إلى الأمام. لماذا هذا؟ لأنك إذا لم تكن متأكدًا من وجوده، فقد تستمر في إضاعة وقتك في البحث عنه.

إن المثال المفضل لديَّ هنا هو ما أسميه «خيمة أم البعوضة الصغيرة». وفيه، ترتفع البعوضة الصغيرة مسافة قدم (متر، أو ميل أو أي شيء أكبر من الصفر) فوق الأرضية. تريد الأم أن تصنع خيمة قاعدتها على الأرضية تحتوي البعوضة الصغيرة، وتريد استخدام

أقل قدر ممكن من المواد. فما أقل مساحة لتلك الخيمة؟ إذا تصورنا البعوضة الصغيرة باعتبارها نقطة واحدة، فإن الإجابة هي: «لا وجود لهذا الشيء». يمكنك صنع خيمة مخروطية رفيعة وطويلة ذات أي مساحة أكبر من الصفر، لكن الخيمة التي تبلغ مساحة سطحها صفرًا عبارة عن خط مستقيم وليست خيمة. بالنظر إلى أي خيمة، هناك خيمة أخرى تفي بالغرض باستخدام نصف كمية المواد. لذلك لا يمكن الجزم بوجود خيمة ذات مساحة هي الأصغر.

بالنسبة لمسألة البائع المتجول، ومع أي مجموعة محدودة من البلدات، مرتبةً على أي نحو نختاره، يوجد حل بالتأكيد، نظرًا لوجود عدد محدود من المسارات الممكنة. يضمن هذا أنك لا تضيع وقتك في محاولة إيجاد أقصر مسار، لكنه لا يخبرك ما هو ذلك المسار. إذا كنت تبحث عن كنز مدفون، فليس من المفيد إخبارك أنه بالتأكيد موجود «في مكان ما»؛ إن التنقيب عبر الكوكب بأكمله ليس بالأمر العملي.

لقد لاحظ عالم الكمبيوتر دونالد كنوث، منذ زمن بعيد، أنه في مجال الحَوسبة يحتاج المرء إلى ما هو أكثر من الإثبات على أن الحل يمكن التوصُّل إليه. إذ يحتاج المرء إلى معرفة كم ستتكلف عملية حساب الحل. ليس بالدولار والسنت، ولكن بالجهد الحسابي. يُسمَّى المجال الرياضي الذي يعالج هذه المشكلة بنظرية التعقيد الحسابي. وخلال مدة قصيرة للغاية، انتقل الأمر من بضع أفكار بسيطة إلى مجموعة معقدة من المبرهَنات والأساليب، ولكنَّ هناك تمييزًا أساسيًّا يساعد، على نحو جزئي لكن بسيط، في فهم الفارق بين الحل العملي والحل غير العملي.

إن القضية الرئيسية هي مدى سرعة تزايد زمن التشغيل (المَقيس بعدد خطوات الحساب) في أي طريقة لحساب حل مسألةٍ ما، مقارنة بحجم البيانات اللازمة لتحديد المشكلة في المقام الأول. على وجه التحديد، إذا استغرق الأمر عدد n من الأرقام الثنائية لتحديد المشكلة، فكيف يعتمد زمن التشغيل على n؟ بالنسبة للخوارزميات العملية، يميل زمن التشغيل إلى التزايد على هيئة مضاعفات للعدد n، على سبيل المثال، n^2 أو n^3. يقال إن هذه الخوارزميات تعمل خلال زمن خطِّي (polynomial)، ويُرمز لها بالفئة P. بينما تتزايد الخوارزميات غير العملية على نحو أسرع، غالبًا خلال زمن أُسِّي، مثل 2^n أو 10^n. إن الخوارزمية الخاصة بتجريب جميع المسارات المستخدمة لحل مسألة البائع المتجول هي على هذا النحو؛ إنها تعمل خلال زمن عاملي !n، الذي يتزايد أسرع من أي زمن أُسِّي. فيما بينهما توجد منطقة رمادية حيث يكون زمن التشغيل أكبر من أي زمن خَطِّي،

ولكنه أصغر من الزمن الأُسِّي. في بعض الأحيان تكون هذه الخوارزميات عملية، وأحيانًا لا تكون كذلك. بالنسبة للأغراض الحالية، يمكننا أن نتَّخذ موقفًا صارمًا للغاية ونعتبرها جميعًا ليست من الفئة P (not-P).

هذه ليست مثل NP.

يشير هذا الاختصار، على نحو محير، إلى فكرة أكثر غموضًا بالكامل، وهي: زمن خطي غير حتمي (nondeterministic polynomial time). ويشير هذا المصطلح بدوره إلى وقت تشغيل خوارزمية يمكنها تحديد ما إذا كان أي حل مقترح معين هو حل صحيح أم لا. تذكر أن عددًا ما يصبح «أوليًّا» إذا لم يكن يقبل القسمة إلا على نفسه والعدد ١، لذا ٢، و٣، و٥، و٧، و١١، و١٣، وهكذا، هي أعداد أولية. وخلاف ذلك هي أعداد مُركَّبة. إذن ٢٦ عدد مركب، لأنه يساوي ٢ × ١٣. والعددين ٢ و١٣ هما العاملان الأوَّليان للعدد ٢٦. افترض أنك تريد إيجاد عامل أوَّلي لعدد مكون من ٢٠٠ رقم عشري. قد تقضي عامًا دون جدوى في البحث عن ذلك العامل الأوَّلي، ثم سيصيبك اليأس وتستشير إحدى العرَّافات الشهيرات. ستخبرك العرافة أن الإجابة هي عدد معين كبير للغاية. وبالطبع أنت ليس لديك أي فكرة من أين جاءت بهذه الإجابة (إذ إنها، في نهاية الأمر، عرَّافة لديها قُوى تبصُّر خارقة)، ولكن يمكنك الجلوس وإجراء العملية الحسابية لمعرفة ما إذا كان العدد الذي قدمته لك العرَّافة قابلًا للقسمة بالفعل على العدد الكبير للغاية قيد الدراسة. إن إجراء تلك العملية الحسابية من أجل التأكد أسهل بكثير جدًّا من عملية إيجاد العامل الأوَّلي نفسه.

لنفترض أنه كلما اقترحت العرَّافة إجابة للمسألة، يمكنك التحقُّق مما إذا كانت صحيحة باستخدام خوارزمية زمن خطي (P). إذن المسألة نفسها تكون من الفئة NP. لذا فإن مهمة العرَّافة أصعب بكثير من مهمتك، ولكن يمكنك دائمًا تحديد ما إذا كانت قد أخبرتك بالإجابة الصحيحة.

من المنطقي أن التحقق من الإجابة المقترحة يجب أن يكون أسهل بكثير من إيجادها. إذ يُعتبر التأكد من وجود كنز مدفون في مكان موضوع عليه علامةٍ ما أسهل كثيرًا من تحديد موضع هذه العلامة. رياضيًّا، يعتقد الجميع تقريبًا أن إيجاد العوامل الأولية لعددٍ ما أصعب بكثير من التحقق من أن عددًا ما هو عامل أوَّلي. الدليل الأساسي على ذلك هو أن الخوارزميات السريعة معروفة بقُدرتها على التحقق من صحة أي عاملٍ مقترح، ولكن ليس لإيجاده. إذا كانت P = NP، إذن بالنظر إلى أي مسألة لها إجابة «يمكن التحقُّق

منها» بسرعة، سيصبح من الممكن «إيجاد» الإجابة بسرعة أيضًا. هذا يبدو مثاليًّا للغاية لدرجة أنه يصعب تصديقه، ويناقض تمامًا خبرة علماء الرياضيات في حل المسائل. لذلك يعتقد، تقريبًا، الجميع أن $P \neq NP$.

ومع ذلك، لقد تعثَّرت كل محاولات إثبات ذلك، أو دَحضه. إذ يمكنك إثبات أن المسألة التي نحاول إيجاد حل لها هي NP عن طريق كتابة خوارزمية صريحة وحساب زمن تشغيلها، ولكن لإثبات أنها ليست P، عليك التفكير في جميع «الخوارزميات الممكنة» لحلها، وإظهار عدم وجود أي منها في الفئة P. كيف يمكن أن تفعل ذلك؟ لا أحد لديه أدنى فكرة.

إن إحدى الحقائق المثيرة للفضول التي تظهر من هذه المحاولات هي أن هناك الكثير من المسائل المماثلة التي لها نفس الوضع. كل هذه المسائل هي من الفئة NP. علاوة على ذلك، إذا كان من الممكن إثبات أن أيًّا منها لا ينتمي للفئة P، إذن جميعها كذلك لا ينتمي للفئة P. فهي إما أن تنتمي أو لا تنتمي كلها. يقال إن مسائل مثل هذه هي من الفئة NP الكاملة. وهناك فئة أكبر ذات صلة هي NP الصعبة، وهي تتكون من خوارزميات يمكنها محاكاة حل أي مسألة NP في زمن خَطِّي. وإذا تبين أن هذه الخوارزمية لها زمن تشغيل خطي، فهذا يثبت تلقائيًّا أن نفس الشيء صحيح بالنسبة لأي مسألة NP. في عام ١٩٧٩، أثبت مايكل جاري وديفيد جونسون أن مسألة البائع المتجول تنتمي إلى الفئة NP الصعبة.[4] وبافتراض أن $P \neq NP$، فإن هذا يعني ضمنيًّا أن أي خوارزمية تُستخدم لحلها لديها زمن تشغيل أكبر من أي خوارزمية ذات زمن خطِّي.

لقد كان فلود على حق.

هذا ليس سببًا جيدًا للاستسلام التام، لأن هناك طريقتين محتملتين على الأقل للمُضي قُدمًا.

الطريقة الأولى، التي سأوضحها على الفور، تعتمد على تجربتنا مع المسائل العملية. إذا كانت مسألة ما ليست P، فإن حلها باستخدام سيناريو أسوأ الحالات هو أمر مستحيل. لكن تبين أن سيناريوهات أسوأ الحالات غالبًا ما تكون مفتعلة للغاية، وليست مشابهة للأمثلة التي يصادفها المرء في العالم الحقيقي. لذلك حاول علماء الرياضيات المشتغلون بمجال أبحاث العمليات تحديد عدد المدن التي يمكنهم التعامل معها لحل مسائل العالم الحقيقي. واتَّضح أن إجراء بعض التعديلات على طريقة البرمجة الخطية التي اقترحها دانتسيج وفالكرسون وجونسون غالبًا ما تؤدي إلى نتائج جيدة على نحو ملحوظ.

في عام ١٩٨٠ توصلوا إلى مسارٍ لـ ٣١٨ مدينة؛ وبحلول عام ١٩٨٧ وصل العدد إلى ٢٣٩٢ مدينة. وفي عام ١٩٩٤، ارتفع العدد إلى ٧٣٩٧ مدينة، وقد استغرق التوصُّل إلى هذه الإجابة نحو ثلاث سنوات من المعالجة على شبكة من أجهزة الكمبيوتر القوية للغاية. في عام ٢٠٠١، جرى التوصل إلى حلٍّ دقيق يتمثل في ١٥١١٢ مدينة ألمانية باستخدام شبكة من ١١٠ معالجات كمبيوتر. وكان التوصل إلى هذا الحل سيستغرق أكثر من عشرين عامًا باستخدام جهاز كمبيوتر مكتبي عادي. في عام ٢٠٠٤، جرى التوصُّل إلى حل لمسألة البائع المتجول من أجل مسار جولةٍ تشمل جميع مدن السويد البالغ عددها ٢٤٩٧٨. في عام ٢٠٠٥، توصل برنامج كونكورد المتخصِّص في حل مسألة البائع المتجول حلًّا لمسارٍ يتكوَّن من ٣٣٨١٠ نقاط على لوحة دوائر إلكترونية مطبوعة. إن تحقيق رقم قياسي من حيث عدد نقاط المسار ليس هو السبب الوحيد لمثل هذا البحث؛ إن الأساليب المستخدمة لتحقيقه تعمل بسرعة كبيرة بالفعل من أجل التوصل إلى حلول لمسائل أصغر. إذ يمكن عادةً التوصل إلى حل من أجل مسارٍ يشمل نحو مائة مدينة في غضون دقائق قليلة، وحتى ألف في ساعات قليلة باستخدام جهاز كمبيوتر مكتبي عادي.

أما الطريقة الثانية، فهي حل المسألة على نحو أقل جودة: إنه حل ليس ببعيد جدًّا عن الأفضل، ولكنه أسهل في إيجاده. في بعض الحالات، يمكن تحقيق ذلك باستخدام اكتشاف مذهل جرى التوصل إليه في عام ١٨٩٠، في مجال من الرياضيات غير مألوف للغاية، لدرجة أن العديد من الشخصيات الرائدة في ذلك الوقت وجدته غير ذي قيمة، ولم يقتنعوا في أغلب الأحوال بالإجابات التي كان يتوصل إليها ببطء علماء الرياضيات الحالمون أكثر. والأسوأ من ذلك أن المسائل التي تعاملوا معها بدت أشبه بالتدريبات الأكاديمية البحتة، التي ليس لها أي علاقة واضحة بأي شيء في العالم الحقيقي. وقد اعتُبرت النتائج التي توصلوا إليها على نطاق واسع مصطَنَعة للغاية، كما وُصفت الأشكال الهندسية الجديدة التي أنشَئُوها بأنها «أشكال منحرفة». وشعر الكثيرون أنه حتى لو كانت هذه النتائج صحيحة، فإنها لم تُسهِم في تطور علم الرياضيات ولو قيد أُنملة؛ فقد ألقت فقط عقبات سخيفة في طريق تقدم المجال، بالانغماس المبالغ فيه في التفاصيل المنطقية.

لقد انبثقت إحدى الطرق لإيجاد حلول جيدة، ولكن أقل من المثلى، لتلك المسألة من إحدى هذه العقبات السخيفة. خلال العقود القليلة التي تسبق عام ١٩٠٠ وتليها، كان علم الرياضيات يمر بمرحلة انتقالية. فقد كانت روح المغامرة المبكرة للتقدم الجريء

التي تجاهلت التفاصيل المزعجة قد وصلت لنهايتها للتو، وكان يزرع تخلِّيها عن أسئلة أساسية، مثل «ما الذي نتحدث عنه حقًّا هنا؟» أو «هل هذا واضح بالفعل مثلما نعتقد جميعًا؟»؛ بذرة الارتباك والحيرة في موضع ينبغي فيه توفر الوضوح والبصيرة. وفيما يتعلق بمجالاتٍ متقدمة، مثل حساب التفاضل والتكامل، حيث كان علماء الرياضيات يستخدمون عمليات لا نهائية بلا حدود، كانت المخاوف تنتقل ببطء من الأفكار المعقَّدة إلى الأكثر بساطة. فبدلًا من وجود شكوك حول تكاملات دوال رياضية معقَّدة مثل اللوغاريتم المركَّب، كان الناس يتساءلون عن ماهية الدالة. وبدلًا من تعريف منحنًى هندسي بأنه متصل إذا كان «يمكن رسمه باليد على نحو حُر»، سعوا إلى مزيد من الدقة، ووجدوا أن الأمر يعوزه ذلك. وحتى طبيعة شيء أساسي وواضح، مثل العدد، كان يتضح أنها مراوغة. ليس فقط بالنسبة للمفاهيم الجديدة مثل الأعداد المركبة، لكن بالنسبة للأعداد الصحيحة المألوفة ١، و٢، و٣. ومن ثَم استمرت الرياضيات التقليدية في مسارها المعتاد، مع افتراض ضِمني أن المسائل من هذا النوع ستُحَل في النهاية وسيصبح كل شيء على ما يرام. فيمكن ترك الحالة المنطقية للأمور الأساسية على نحو آمن للمتنازعين والمتحذلقين. ومع ذلك ... فقد بدأ يتبلور شعور متزايد بأن هذا النهج المتعجرف في معالجة الموضوع لا يمكن أن يستمر لمدة أطول.

وقد بدأت الأمور تسوء بالفعل عندما شرعت الأساليب العتيقة في تقديم إجابات يتناقض بعضها مع بعض. فقد تبين أن المبرهَنات التي كان يُعتقد أنها صحيحة منذ مدة طويلة تكون خاطئة في ظل ظروف استثنائية، عادة ما تكون غريبة إلى حد ما. فعند حساب تكامل ما، بطريقتين مختلفتين، نحصل على إجابتين مختلفتين. وعند حساب متسلسلة ما، يُعتقد أنها تتقارب لكل قيم المتغير، فنجد أنها في بعض الأحيان تتباعد. لم يكن الوضع سيئًا بحيث يُرى أن ٢ + ٢ في بعض الأحيان يساوي ٥، لكنه جعل بعض الناس يتساءلون عن ماهية العددين ٢ و٥ في واقع الأمر، فضلًا عن الرمزين + و=.

وهكذا استمرت قلة من مُتصيِّدي الأخطاء، الذين لم تردعهم الأغلبية الرافضة — أو، على الأقل، لم يُردعوا بما يكفي لتغيير آرائهم — في التنقيب عبر صرح علم الرياضيات، من القمم العالية إلى الأساسات، بحثًا عن أرض صلبة، ثم بدءُوا في تجديد المبنى من أسفل إلى أعلى.

ومثل جميع عمليات التجديد، اختلفت النتيجة النهائية عن الأصل بطُرق طفيفة، لكن مزعجة. فعلى سبيل المثال، تبيَّن أن هناك جوانب خفية لمفهوم المنحنى المستوي،

الذي كان موجودًا منذ زمن اليونانيين القدماء. صحيح أن الأمثلة التقليدية لهذا المنحنى — مثل الدائرة والشكل الإهليلجي والقطع المكافئ عند إقليدس وإراتوستينز، والمنحنى التربيعي الذي استخدمه اليونانيون لتثليث الزوايا وتربيع الدائرة، ومنحنى العروتين الذي يشبه شكل العدد ثمانية باللغة الإنجليزية، والذي توصل إليه عالم الرياضيات والفيلسوف الأفلاطوني الجديد بروكلس، والأشكال البيضاوية التي توصل إليها العالِم جيوفاني دومينيكو كاسيني، والمنحنيات الدُّوَيرية والمنحنيات الأكثر تعقيدًا المستلهمة منها، مثل المنحنيات الدويرية التحتية والفوقية التي توصَّل إليها أوول رومر — قد احتفظت بسحرها الخاص، وقادت الطريق نحو تطورات ملحوظة. ولكن، مثلما تعطي الحيوانات المستأنسة صورةً مضلِّلة عن الحياة في الغابات المطيرة والصحاري الموحِشة، فإن هذه المنحنيات كانت أبسط بكثير من أن تمثِّل المخلوقات الوحشية التي تطوف في الغابة الرياضية. وعند اتخاذها نماذجَ للتعقيد المحتمل للمنحنيات المتصلة، بدت بسيطة وسهلة للغاية.

إن أحد أهم الميزات الأساسية للمنحنيات، الواضحة للغاية لدرجة أنه لم يسعَ أحد إلى التشكيك فيها، هي أنها «رفيعة». وكما كتب إقليدس في كتابه «العناصر»، «إن الخط الهندسي هو شكل ليست له سماكة». ومن الواضح أن مساحة الخط الهندسي — فقط الخط في حد ذاته، وليس ما يحيط به، أيًّا كان — تبلغ قيمتها صفرًا. ولكن في عام ١٨٩٠، توصل جوسيبي بيانو إلى منحنًى متصل يملأ بالكامل الجزء الداخلي للمربع.[5] وهو شكل لا يتحرك فقط داخل المربع على نحو عشوائي ومعقَّد بحيث يكاد يقترب من أي نقطة؛ إنه يمر خلال «كل» نقطة في المربع، ويخترقها بكل دقة. إن منحنى بيانو بالفعل «ليست له سماكة»، بمعنى أنك ترسمه عن طريق رسم خط بقلم رصاص طرفه يمثل نقطة هندسية واحدة، لكن هذا الخط يتحرك حركة ملتوية بطريقة معقدة للغاية، وهو يُعيد على نحو متكرر زيارة المناطق التي غادرها سابقًا. وقد أدرك بيانو أنه إذا جعلناه يتحرك حركة ملتوية إلى ما لا نهاية، بطريقة يُتحكم فيها بعناية، فسوف يملأ المربع بأكمله. وهذا يعني أن مساحة المنحنى هي نفس مساحة المربع؛ إذن هي ليست صفرًا.

جاء هذا الاكتشاف بمثابة صدمة للحدس الساذج. آنذاك، كانت تُوصف المنحنيات من هذا النوع بأنها «منحرفة»، وكان رد فعل العديد من علماء الرياضيات تجاهها مشابهًا لرد فعلنا تجاه أي موضوع منحرف عن الحالة الطبيعية؛ حيث يعترينا الخوف والاشمئزاز. في وقت لاحق، اعتاد الوسط الرياضي عليها واستوعب الدروس الطوبولوجية

العميقة التي تقدمها لنا. ونحن اليوم نعتبر منحنى بيانو مثالًا مبكرًا لهندسة الفراكتالات، ولم نعُد مطلقًا نتعامل مع الفراكتالات على أنها غير معتادة أو منحرفة. إنها شائعة، حتى في الرياضيات، وفي العالم الحقيقي تقدم نماذج ممتازة من التراكيب المعقَّدة للغاية في الطبيعة، مثل السُّحب والجبال والسواحل.

فحص رواد هذا العصر الجديد للرياضيات مفاهيم بديهية قديمة، مثل الاتصال والبُعد، وبدءُوا في طرح الأسئلة الصعبة. وبدلًا من افتراض أنهم يمكن أن يستمروا في الاعتماد على الحيل التقليدية المستخدمة في مجالات الرياضيات الأكثر بساطة، تساءل هؤلاء الرواد عما إذا كانت هذه الحيل تعمل بعمومية كافية، وإذا كانت كذلك، فما السبب؟ أو، إذا لم تكن تعمل دائمًا على هذا النحو، فما الخطأ الذي يحدث؟ أزعج هذا المنهج المتشكِّك العديد من علماء الرياضيات التقليديين، الذين رأوا أنه سلبي في حد ذاته. وقد كتب شارل إرميت في عام ١٨٩٣ إلى صديقه توماس ستيلتشس يقول: «لقد ابتعدت بخوف ورعب عن هذه الكارثة الرهيبة المتمثِّلة في الدوال المتصلة التي ليس لها مشتق».

كان التقليديون أكثر اهتمامًا بتوسيع الحدود بافتراض أن كل شيء في النطاق المنطقي حسن، لكن المنهج المتشكك الجديد، مع الموجة التي صاحبته من التحديات الغريبة للحدس، كان ردَّ فعل ضروريًّا ضد السذاجة. وبحلول الثلاثينيات من القرن الماضي، بدأ تأثير هذا المنهج الأكثر صرامة يصبح واضحًا؛ ثم بحلول الستينيات من القرن نفسه، ساد على نحو شِبه تام. يمكنك تأليف كتاب كامل عن هذه الفترة من تطور مجالنا، وقد فعل بعض المؤلفين ذلك. لكنني هنا أريد التركيز على موضوع فرعي واحد، ألا وهو المنحنيات المتصلة ومفهوم البعد.

يعود مفهوم المنحنى، على الأرجح، إلى الأزمان الغابرة، عندما جر شخص طرف عصا عبر رقعة من الرمال أو الطين واكتشف أنها قد تركت أثرًا. ثم بدأ في الحصول على صيغته الحالية عندما ظهر منهج منطقي لعلم الهندسة في اليونان القديمة، وأكد إقليدس أن النقطة لها موضع فقط وأن الخط ليست له سماكة. والمنحنى هو خط ليس من الضروري أن يكون مستقيمًا، وأبسط مثال على ذلك هو أن يصبح على شكل دائرة أو قوس. وقد طوَّر اليونانيون القدماء وحللوا مجموعة متنوعة من المنحنيات؛ مثل المنحنى الإهليلجي، والمنحنى التربيعي، والمنحنى الدويري وغيرها، مثلما ذكرنا آنفًا. وقد ناقشوا أمثلة محددة فقط، لكن كان «واضحًا إلى حد ما» كيف ينبغي أن تسير الفكرة العامة.

بعد ظهور حساب التفاضل والتكامل، حازت اثنتان من خصائص المنحنيات الاهتمام. الأولى هي الاتصال: يعتبر المنحنى مُتَّصلًا إذا لم يتخلَّله أي فجوات. الثانية، وهي أكثر رقة، هي الانسيابية أو السلاسة: يعتبر المنحنى انسيابيًّا إذا لم تكن له أركان حادة. وتتناسب المنحنيات المتصلة على نحو أفضل مع حساب التكامل، والمنحنيات الانسيابية مع حساب التفاضل. (أنا أُبدي قدرًا «كبيرًا للغاية» من التبسيط هنا، للحفاظ على الإيقاع السريع للسرد في الكتاب، لكنني أزعم أنني لم أقدم معلومات خاطئة.) بالطبع، لم يكن الأمر بهذه البساطة؛ كان من الضروري وضع تعريف محدد لكلمتَي «فجوة» و«ركن»، وفعل ذلك على نحو «دقيق». ومن الواضح أن أيًّا كان التعريف الذي سيُطرح، كان يجب أن يكون مناسبًا للدراسة الرياضية، ومصاغًا بمصطلحات رياضية. كما كان ينبغي أن نتمكن من «استخدامه». لا تزال تفاصيل ذلك تحيِّر الطلاب الدارسين لعلم للرياضيات في المرة الأولى التي يتعرضون فيها إليها، لذلك سأوفر هنا عليكم هذا العناء.

أما بالنسبة للمفهوم الرئيسي الثاني فهو البُعد. نعلم جميعًا أن الفراغ له ثلاثة أبعاد، وأن المستوى له بُعدان، وأن الخط المستقيم له بُعد واحد. ونحن لن ندرس هذه الفكرة من خلال وضع تعريف لكلمة «بعد» ثم تحديد عدد الأبعاد الموجودة في الفراغ أو المستوى. لن يسير الأمر على هذا النحو بالضبط. بدلًا من ذلك، نقول إن الفراغ له ثلاثة أبعاد؛ لأنه يمكننا تحديد موضع أي نقطة باستخدام ثلاثة أعداد. إذ نختار نقطة محددة، وهي نقطة الأصل، وثلاثة اتجاهات: محور شمال–جنوب، ومحور شرق–غرب، ومحور أعلى–أسفل. وبَعد ذلك علينا فقط قياس مدى بُعد هذه النقطة المختارة عن نقطة الأصل، في كل من هذه الاتجاهات الثلاثة. ينتج عن ذلك ثلاثة أعداد (وهي «الإحداثيات» المتعلقة بخيارات الاتجاهات هذه)، ويتحدد موضع كل نقطة في الفراغ عبر مجموعة ثلاثية الأعداد واحدة فقط. وبالمثل، فإن المستوى له بعدان، لأننا نستطيع الاستغناء عن أحد هذه الأعداد، لنقل العدد الممثل للمحور أعلى–أسفل، والخط له بُعد واحد.

يبدو كل هذا سهلًا إلى أن يبدأ المرء في التفكير. تفترض الفقرة السابقة أن المستوى محل الدراسة أفقي. لهذا السبب يمكن الاستغناء عن المحور أعلى–أسفل. ولكن ماذا لو كان المستوى مائلًا؟ عندئذٍ لن نتمكن من الاستغناء عن هذا المحور. ومع ذلك، اتَّضح أن العدد الممثل لإحداثي النقطة على المحور أعلى–أسفل يُحدِّده دائمًا العددان الآخران (شريطة أن تعرف قدر الميل). إذن ما يُهم ليس عدد الاتجاهات (المحاور) التي نقيس عبرها الإحداثيات، ولكن عدد الاتجاهات «المستقلة». وهذا يعني الاتجاهات التي لا تعتمد على مجموعة من الاتجاهات الأخرى.

لقد أصبح الأمر أكثر تعقيدًا بعض الشيء الآن؛ لأنه لا يمكننا فقط تحديد عدد الإحداثيات الموجودة لدينا. إذ أصبح الأمر أقرب إلى حالة تحديد أصغر عدد من شأنه أداء المهمة. وهذا يثير سؤالًا آخر، أكثر عُمقًا إلى حدٍّ ما، وهو: كيف للمرء أن يعرف أن اثنين من الإحداثيات هو في الواقع أصغر عددٍ مِن شأنه أداء المهمة بالنسبة لمستوًى؟ قد يكون هذا صحيحًا — وإن لم يكن كذلك، فنحن بحاجة إلى تعريف أفضل — لكن هذا ليس واضحًا على نحوٍ تام. وهذا يثير بدوره أسئلة أخرى. كيف نعرف أن ثلاثة إحداثيات هي أصغر عدد من شأنه أداء المهمة بالنسبة للفراغ؟ كيف نعرف أن «أي» اختيار للاتجاهات المستقلة يعطي دائمًا ثلاثة أعداد؟ في هذا الصدد، إلى أي مدًى نحن متأكدون من أن ثلاثة أعداد هي قدر كافٍ؟

إن هذا السؤال الثالث هو في الحقيقة سؤال يجب استكشافه من خلال مجال الفيزياء التجريبية، وهو يؤدي، من خلال أينشتاين ونظريته العامة للنسبية، إلى الاقتراح القائل بأن الفراغ الفيزيائي ليس، في واقع الأمر، هو الفراغ المسطح الثلاثي الأبعاد الخاص بإقليدس، لكنه نُسخة منحنِية منه. أو، إذا كان مُنظرو نظرية الأوتار محقِّين، أن الزمكان له عشرة أو أحد عشر من الأبعاد، جميعها، باستثناء أربعة، إما أصغر من أن نلاحظها أو أنها تفوق قدرتَنا على الملاحظة. يمكن الإجابة على السؤالين الأول والثاني على نحو مُرضٍ، ولكن ليس باستخفاف، من خلال النظر إلى الفراغ الإقليدي الثلاثي الأبعاد على أنه نظام إحداثيات من ثلاثة أعداد، ثم الالتحاق بدورة تدريبية في الجامعة لمدة خمسة أو ستة أسابيع لدراسة الفراغات المتجهية؛ حيث وجود أي عدد من الإحداثيات هو أمر ممكن، لإثبات أن البعد الخاص بالفراغ المتجهي مُتفرِّد.

وهناك فكرة مُتأصِّلة في نهج الفراغات المتجهية، وهي أن نظام الإحداثيات لدينا قائم على خطوط مستقيمة، وأن الفراغ مسطَّح. في الواقع، يطلق على هذا النهج اسم آخر هو «الجبر الخطي». ماذا لو تملكتنا روح أينشتاين وسمحنا لنظام الإحداثيات بالانحناء؟ حسنًا، إذا كان ينحني بانسيابية (تُسمى الإحداثيات في هذه الحالة على نحو كلاسيكي «الإحداثيات المنحنية»)، فكل شيء على ما يرام. ولكن في عام ١٨٩٠، اكتشف عالم الرياضيات الإيطالي جوسيب بيانو أنه إذا كان نظام الإحداثيات ينحني على نحو حاد — حاد لدرجة أنه لم يعد انسيابيًّا، لكنه يظل مُتَّصلًا — عندئذٍ يمكن لفراغ ثنائي الأبعاد أن يكون له نظام إحداثيات له عدد «واحد» فقط. وينطبق الشيء نفسه على فراغ ثلاثي الأبعاد. في هذه الحالة الأكثر عمومية ومرونة، يصبح، على نحو مفاجئ، «عدد» الأبعاد قابلًا للتغيير.

إن أحد ردود الفعل على هذا الاكتشاف الغريب هو رفضه؛ من الواضح أنه يتعين علينا استخدام الإحداثيات الانسيابية، أو أي شيء ذي صلة. ولكن اتضح أنه أمر أكثر إبداعًا وفائدة، وفي الواقع أكثر «متعة» بكثير أن نتقبل الغرابة على نحو حماسي ونراقب ما يحدث. لكن النُّقاد التقليديين كانوا مُتزمِّتين إلى حدٍّ ما، ولم يرغبوا في أن يحظى جيل الأحدث عهدًا بأي مُتعة على الإطلاق.

دعنا ندخل في صلب الموضوع. إن ما اكتشفه بيانو — أو على وجه الدقة صمَّمه — هو منحنًى متصل يمر عبر كل نقطة في مربع. ليس فقط حدوده، فهذا سهل؛ بل في الجزء الداخلي بأكمله أيضًا. ويجب حقًّا أن يخترق المنحنى كل نقطة بالضبط، وليس فقط يقترب منها بشدة.

لنفترض أن هذا المنحنى موجود. إذن، فهو مجرد نوع من الخطوط الملتَوية، الذي له نظام إحداثيات جوهري خاص به؛ إلى أي مدًى يجب أن نذهب على طول الخط. هذا عدد واحد، ومن ثَم فإن المنحنى أُحادي الأبعاد. ومع ذلك، إذا مر هذا المنحنى الملتوي عبر كل نقطة من مربع مصمَت، الذي هو ثنائي الأبعاد، فقد تمكنًّا الآن من تحديد كل نقطة من هذا المربع باستخدام عددٍ واحد فقط متغير باستمرار. لذلك فإن المربع هو في الواقع أُحادي الأبعاد!

أنا أتجنَّب استخدام علامات التعجُّب بوجه عام عند تأليف أي كتاب، لكن هذا الاكتشاف يستحق واحدة. فهو اكتشاف مُذهِل. وصحيح أيضًا.

لقد توصَّل بيانو إلى المثال الأول لما نسميه الآن منحنى «ملء الفراغ». ويعتمد وجوده على التمييز الدقيق، ولكن الحيوي، بين المنحنيات الانسيابية والمنحنيات المتصلة. إذ يمكن أن تتحرك المنحنيات المتصلة على نحو ملتوٍ بشدة. لكن المنحنيات الانسيابية ... لا يمكنها ذلك. فهي لا يمكنها التحرك بنفس درجة الالتواء.

لقد امتلك بيانو طريقة التفكير المناسبة التي مكَّنته من ابتكار المنحنى الذي أصبح يحمل اسمه. واهتم للغاية بالنقاط الدقيقة في التفاصيل المنطقية. وكان هو أيضًا أول شخص يكتب مسلمات رياضية دقيقة لمجموعة الأعداد الصحيحة؛ وهي قائمة بسيطة من الخواص التي تحدد هذه المجموعة بدقة. كما أنه لم يبتكر منحنى ملء الفراغ الخاص به فقط من أجل المتعة؛ لقد كان يضع اللمسات الأخيرة على عمل عالِم سابق لديه طريقة تفكير مشابهة، وكان أيضًا مُولعًا بدراسة طبيعة الأعداد الصحيحة والعد. كان هذا

العالم اسمه جيورج كانتور، وقد اهتم للغاية بدراسة مفهوم اللانهاية. لكن معظم علماء الرياضيات البارزين في هذه الفترة رفضوا أفكار كانتور الثورية والرائعة، مما دفعه إلى اليأس. ربما لم يكن الرفض هو سبب إصابته بمرض عقلي فيما بعد، مثلما يفترض في بعض الأحيان، لكنه بالتأكيد كان أمرًا سلبيًّا. وكان من بين علماء الرياضيات الكبار القلائل الذين كانوا يُقدرون أفكار كانتور ديفيد هيلبرت، وهو العالم الذي حقق إنجازات كبيرة في علم الرياضيات. ربما كان هيلبرت عالم الرياضيات الرائد في عصره، الذي أصبح فيما بعد واحدًا من رواد المنطق الرياضي وأسَّس المجال الرياضي. ولعله وجد في أفكار كانتور مصدرَ إلهام له.

على أي حال، لقد بدأ كل شيء مع كانتور، وتقديمه للأعداد الأصلية الفوق المنتهية؛ وهي طريقة لحساب عدد عناصر المجموعة غير المنتهية. ولقد أثبت على نحو شهير أن بعض أشكال اللاتناهي أكبر من غيرها. بتعبير أدق، لا يمكن مقابلة عناصر مجموعة الأعداد الصحيحة وعناصر مجموعة الأعداد الحقيقية. وبينما هو يبحث عن عدد أصلي فوق منتهٍ أكبر من ذلك الخاص بالأعداد الحقيقية، لمدة من الوقت أصبح مقتنعًا بأن العدد الأصلي للمستوى لا بد أن يكون أكبر من ذلك الخاص بالخط. وفي عام ١٨٧٤ كتب إلى ريتشارد ديدكايند يقول:

> هل يمكن أن تكون هناك مقابلة فريدة بين سطح ما (لنقل مربع يتضمن حدوده الخارجية) وخط ما (لنقل قطعة مستقيمة تتضمن طرفيها) بحيث تصبح بالنسبة لكل نقطة على السطح نقطة مقابلة على الخط، وعلى نحو عكسي، لكل نقطة على الخط هناك نقطة مقابلة على السطح؟ أعتقد أن التوصل إلى إجابة لهذا السؤال لن تكون مهمة سهلة، على الرغم من حقيقة أن الإجابة يبدو من الواضح جدًّا أنها «كلا، لا يمكن»، إلى درجة أن محاولة بذل جهد لتقديم إثبات لها هي محاولة غير ضرورية تقريبًا.

بعد ثلاث سنوات كتب مرة أخرى ليقول إنه كان مخطئًا. مخطئًا للغاية. لقد تمكن من إيجاد مقابلة بين فترة الوحدة والفراغ ذي عدد الأبعاد n بالنسبة لأي عدد متناهٍ n. أي تمكن من إيجاد طريقة لمقابلة عناصر المجموعتين، بحيث يقابل كل عنصر في إحداهما عنصرًا في الأخرى على نحوٍ تام. فكتب كانتور يقول: «أرى تلك المقابلة، لكن لا أصدق وجودها!»

إن الفكرة الأساسية بسيطة: بالنسبة لأي نقطتين في فترة الوحدة (بين ٠ و١)، يمكننا كتابتهما بصيغة عشرية كما يلي:

$$x = 0.x_1x_2x_3x_4\ldots$$

$$y = 0.y_1y_2y_3y_4\ldots$$

ويمكن أن نجعل هذا يقابل نقطة في فترة الوحدة التي مفكوكها العشري هو:

$$0.x_1y_1x_2y_2x_3y_3x_4y_4\ldots$$

وذلك من خلال تشابك المنازل العشرية، مثل خلط أوراق اللعب بِقِسمتها إلى نصفين متساويين.[6] والفارق الرئيسي هو أن أوراق كانتور عددها لا نهائي. والآن، عند خلط مجموعتين متساويتين من الأوراق عدد كل منها لا نهائي على النحو الموضح، سنحصل على مجموعة واحدة من الأوراق عددها لا نهائي. هكذا تمكن كانتور من دمج إحداثيين في إحداثي واحد. وللتعامل مع ثلاثة أبعاد، ما علينا سوى استخدام ثلاث مجموعات، وهكذا.

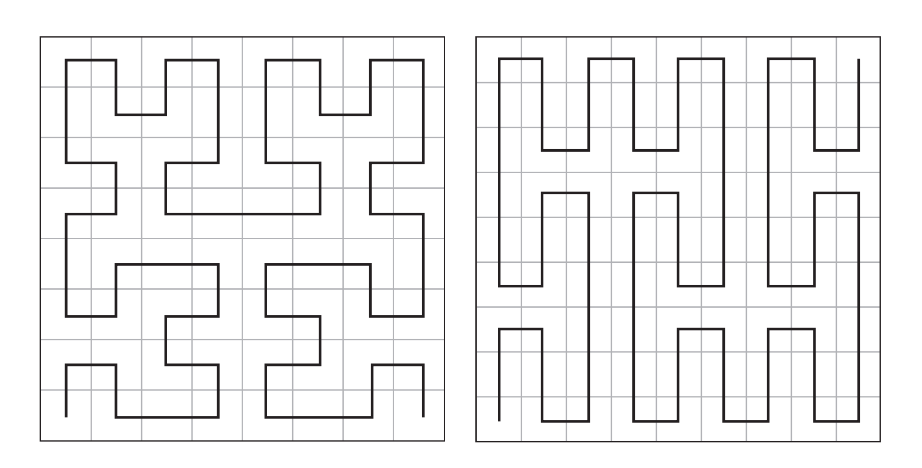
وقد نشر كانتور بعض هذه النتائج في عام ١٨٧٨. وأجرى بحثه على مجموعات قابلة للعَدِّ يمكن وضعها في مقابلة فردية مع أعداد العد، ومجموعات في مقابلة بعضها مع البعض. كما أدرك أيضًا أن المقابلة التي توصل إليها بين فترة الوحدة ومربع الوحدة لا تحافظ على البُعد — حيث يتحول بعد واحد إلى اثنين من الأبعاد — وعلى نحوٍ مهم من أجل قصتنا، أكد أن المطابقة التي أثبتها غير متصلة. وهذا يعني أن النقاط القريبة جدًّا بعضها من بعض في فترة الوحدة لا تحتاج إلى أن تتقابل مع النقاط القريبة جدًّا بعضها من بعض في مربع الوحدة.

كانت أفكار كانتور مثيرة للجدل؛ حيث اعتبرها بعض علماء الرياضيات البارزين مجرد هراء، ربما لأنها كانت مبتكرة لدرجة أنها كانت تتطلب وجود مَلَكة الخيال والعقل المتفتح من أجل تقبلها. بينما أعلن آخرون، أبرزهم هيلبرت، أن المجال الجديد الذي استكشف كانتور آفاقه هو بمنزلة «جنة» في علم الرياضيات. ولم يحدث الاعتراف الكامل بأهمية عمل كانتور إلا بعد وفاته.

في عام ١٨٧٩، أجاب أويجن نيتو[7] على سؤال واضح من خلال إثبات أنه لا توجد مقابلة «متصِلة» بين فترة الوحدة ومربع الوحدة المصمت، وهو أمر أعقد مما قد يبدو. ثم جاء

التطور الأكثر أهمية في عام ١٨٩٠، عندما أثار العالم بيانو ضجة عارمة بعد توصله إلى منحنى ملء الفراغ، موضحًا أن صورتنا الذهنية الافتراضية عن المنحنى المتصل يمكن أن تكون مضلِّلة على نحو واضح.

لم تتضمن الورقة البحثية التي قدمها بيانو أي صور. وقد عرَّف المنحنى باستخدام مفكوكات أساسها ٣ للنقاط في فترة الوحدة، ويكافئ النموذج الذي توصل له الشكل الهندسي الموضح في الصورة اليمنى من الشكل التالي.[8] في عام ١٨٩١، نشر هيلبرت نموذجًا آخر لمنحنى ملء الفراغ، حيث رسم شكلًا مثل الموضَّح في الصورة اليسرى. وقد بدا كلا الشكلين معقدين إلى حد ما؛ حيث توضح الصورتان مرحلة مبكرة من العملية التكرارية التي يستبدل فيها بالمضلَّعات البسيطة على نحو متكرر أخرى أكثر تفصيلًا. ومنذ ذلك الحين، جرى التوصل إلى العديد من منحنيات ملء الفراغ الأخرى.



الصورة اليمنى: مرحلة مبكرة في التأويل الهندسي لمنحنى ملء الفراغ الذي توصل إليه بيانو.
الصورة اليسرى: مرحلة مبكرة في تصميم منحنى ملء الفراغ الذي توصل إليه هيلبرت.

إن لمنحنيات ملء الفراغ تطبيقات في مجال الحَوسبة، مثل تخزين واسترجاع البيانات المتعددة الأبعاد.[9] وتقوم الفكرة الأساسية على أنه يمكننا اجتياز مصفوفة متعددة الأبعاد عن طريق اتباع تقريب لمنحنى ملء الفراغ، مما يقلل من المشكلات ويجعلها حالة أُحادية الأبعاد. وهناك تطبيق آخر يعطي حلًّا سريعًا لكن منخفض الجودة لمسألة البائع المتجول.

تتمثل الفكرة في تنفيذ تقريب متناهٍ لمنحنى ملء الفراغ عبر المنطقة التي تحتوي على المدن المراد زيارتها، ووضع المدن بالترتيب على طول المنحنى، ثم زيارتها بهذا الترتيب باستخدام أقصر مسار جولة في كل خطوة. ومن ثَم نحصل على مسار جولة لا يزيد طوله عادةً عن طول المسار الأمثل إلا بمقدار لا يتجاوز ٢٥٪.[10]

ما الأشكال الهندسية الأخرى التي يمكن لمنحنًى أن يملأها؟ يمكن أن يملأ المنحنى الذي توصل إليه هيلبرت فراغًا ثلاثي الأبعاد، لنحصل على منحنًى يملأ مكعب الوحدة، ومنحنيات يمكن أيضًا أن تملأ مكعبات فائقة أيًّا كان عدد أبعادها. إن الكلمة الأخيرة هنا هي مبرهَنَة أثبتها هانس هان وستيفان مازوركيوفيتش، توضح على نحو تام الفراغات الطوبولوجية التي يمكن لمنحنًى أن يملأها.[11] فقد اتضح أنه يمكن أن يملأ أي شيء تقريبًا، شريطة أن يكون مدمجًا (محدود النطاق) ويلبي بعض الشروط الفنية لاستبعاد الفراغات السخيفة.

ورغم كل ما سبق، قد يكون للبائع المتجوِّل الكلمة الأخيرة. ففي عام ١٩٩٢، اكتشف سانجيف أورورا وزملاؤه[12] أن فئة التعقيد NP («التي يمكن التحقق منها على نحو سهل») لها خاصية غريبة تُلقي بظلال الشك على احتمالات إيجاد خوارزميات خاصة بالفئة P («التي يمكن حسابها على نحو سهل»)، تعطي حلولًا تقريبية جيدة. فقد أثبتوا أنه إذا كان $P \neq NP$، وحجم المسألة تجاوز حدًّا معينًا، فإن الوصول لتقريب جيد للإجابة صعب، شأنه في ذلك شأن إيجاد الإجابة نفسها. إن البديل الوحيد لهذا الاستنتاج هو إثبات أن $P = NP$، الذي سيفوز من يتوصل إليه بجائزة مليون دولار، ولكن يجب أن يظل افتراضيًّا.

وقد ارتبط عملهم بفكرة مميزة حقًّا: الإثباتات الشفَّافة. الإثباتات هي جوهر الرياضيات الحقيقية. في معظم فروع العلم، يمكنك اختبار نظرياتك في مقابل الواقع من خلال الملاحظة أو إجراء التجارب. تفتقر الرياضيات إلى هذه الرفاهية، ومع ذلك فإن لديها طريقة للتحقق من نتائجها. أولًا: يجب دعمها بإثبات منطقي. ثانيًا: يجب التحقُّق من هذا الإثبات للتأكد من عدم وجود أخطاء وفجوات فيه. وبوجه عام، يصعب الوصول إلى هذه الحالة المثالية، وهي ليست ما يفعله علماء الرياضيات بالفعل، ولكنها تمثل ما يهدفون إليه. إن أي شيء يفشل في اجتياز مثل هذا الاختبار يُوصف على الفور بأنه «خطأ»، على الرغم من أنه قد يكون لا يزال مفيدًا باعتباره خطوة نحو إثبات أفضل

يكون صحيحًا. إذن، منذ زمن إقليدس وحتى يومنا هذا، أمضى علماء الرياضيات الكثير من الوقت في التدقيق بعناية في الإثباتات، التي تخصهم أو تخص غيرهم، وتفحَّصوها سطرًا سطرًا، للبحث عن أشياء يُقرون بصحتها وأخرى غير منطقية تمامًا.

في السنوات الأخيرة، ظهرت طريقة مختلفة للتحقق من الإثباتات المتمثلة في استخدام الكمبيوتر. وهذا يتطلَّب إعادة كتابة الإثباتات بلغة يمكن لأجهزة الكمبيوتر معالجتها باستخدام الخوارزميات. وقد نجح الأمر، وحقق بعض النجاحات المهمة فيما يتعلق ببعض من أصعب الإثباتات في الدوريات العلمية، ولكن حتى الآن لم تستطع تلك الطريقة إزاحة الطرق الأكثر تقليدية. إن إحدى النتائج الفرعية لهذه الفكرة هي إعادة التركيز على كيفية تقديم الإثباتات بطرق متوافقة مع أجهزة الكمبيوتر، التي غالبًا ما تختلف تمامًا عن أي شيء يجده الإنسان مستساغًا. إذ لا تعترض أجهزة الكمبيوتر إذا طُلب منها أن تفعل نفس الشيء ملايين المرات، أو تتحقق من سلسلتين مكونتين من ألف رقم ثنائي للتأكد من أنهما متطابقتان. إنها فقط تؤدي المهام التي تُطلب منها.

إن علماء الرياضيات البشريين يفضلون الإثباتات ذات البنية القصصية، التي لها بداية ووسط ونهاية تتسم بالوضوح، وسيناريو مقنع يجذبك من البداية، المتمثلة في فرضيات المبرهنة، وحتى الوصول إلى الاستنتاج الخاص بها. فالسرد أكثر أهمية من التركيز المبالغ فيه على التفاصيل المنطقية. ويجب أن تصبح الأهداف واضحة وموجزة، وقبل كل شيء «مقنعة». ضع في الاعتبار أن علماء الرياضيات يشتهرون بأنهم من الصعب إقناعهم.

توصل علماء الكمبيوتر الذين يدرسون الإثباتات القابلة للتحقق منها باستخدام الكمبيوتر إلى طريقة مختلفة تمامًا، وهي الإثباتات التفاعلية. فبدلًا من تقديم الإثبات على هيئة قصة، يكتبها عالم رياضيات ويقرؤها آخر، فإن هذه الطريقة تحول عملية الإثبات إلى جدال. فعلى سبيل المثال نفترض أن عالم رياضيات، الذي يُسمى تقليديًّا في هذا الإطار بات، يريد إقناع زميلته فانا بأن إثباته صحيح؛ بينما تريد فانا إقناعه بأنه خطأ. يستمر الاثنان في طرح الأسئلة على بعضهما وتقديم الإجابات حتى يستسلم أحدهما. (إن بات ساجاك وفانا وايت هما المقدمان التليفزيونيان الأمريكيان الشهيران لبرنامج المسابقات «ويل أوف فورتشن».) إن هذه الطريقة تشبه مباراة شطرنج؛ حيث يدَّعي بات أنه «سيسقط الملك بعد أربعة تحركات». لكن فانا لا تتفق معه في الرأي، لذلك يقوم بات بأحد التحركات. فتواجهه فانا بتحرك مضاد قائلة: «ماذا لو تحركت أنا هكذا؟» فينفذ بات تحركًا آخر. ويستمر ذلك إلى أن تخسر فانا. والآن تبدأ في تتبع مسار اللعبة على نحو

عكسي. وتقول: «لنفترض أن آخر تحرك لي كان «هذا» بدلًا من ذلك؟» عندئذٍ ينفذ بات تحركًا مختلفًا، ويسقط الملك! وهكذا يسير الأمر إلى أن تُستنفَد كل ردود فانا المحتملة على تحركات بات، ويفوز بات، أو حتى يُجبَر هو على الاعتراف بأنه، بالفعل، لم يستطع أن يسقط الملك بعد أربعة تحركات، كما زعم. من واقع خبرتي، هذا بالضبط ما يفعله علماء الرياضيات الحقيقيون عندما يعملون معًا لحل مشكلة بحثية، ويمكن أن يتحول الأمر إلى مناظرة مشتعِلة للغاية. أما النسخة السردية، فهي تشبه عرض النتيجة النهائية في ندوة علمية.

وقد طوَّر لاسلو باباي وآخرون هذا النوع من تقنيات الإثبات الجدالي ليتوصلوا لمفهوم الإثبات الشفاف، باستخدام أدوات رياضية مثل كثيرات حدود الحقول المنتهية وشفرات تصحيح الأخطاء.[13] وقد أُدرك، مع التوصل لهذه الطرق، أنه يمكن للكمبيوتر أن يستفيد من ميزة قد تجنبها الوضوح والإيجاز: وهي التكرار. إذ اتضح أنه يمكن إعادة كتابة إثبات منطقي بطريقة تجعله أطول إلى حد كبير، ولكن هذا يعني أيضًا أنه إذا كان هناك خطأ، فإنه يظهر في كل مكان تقريبًا. حيث تتوزع كل خطوة في المنطق عبر الإثبات بالكامل في نسخ متعددة مترابطة بشدة. إنه يشبه إلى حد ما الصورة المجسمة؛ حيث تُحوَّل الصورة بحيث يمكن إعادة بنائها من أي جزء صغير من البيانات. يمكن عندئذٍ التحقق من الإثبات عن طريق أخذ عينة عشوائية صغيرة. سوف يظهر أي خطأ على نحو شِبه مؤكد في تلك العيِّنة. افعل هذا، وستحصل على إثبات شفاف. إن المبرهَنَة حول عدم وجود حلول تقريبية للفئة P هي نتيجة لهذا الأمر.

لنعُد إذن إلى الورقة البحثية الخاصة بالحمام التي نشرها جيبسون وويلكينسون وكيلي في دورية «أنيمال كوجنيشن». لقد بدءُوها بملحوظة تقول إن مسألة البائع المتجول كانت قد استُخدمت مؤخرًا لدراسة خصائص الإدراك في البشر والحيوانات، وخاصة القدرة على التخطيط للتصرفات قبل فعلها. ومع ذلك، لم يكن من الواضح ما إذا كانت هذه القدرة مقصورة على رتبة الرئيسيات. هل يمكن للحيوانات الأخرى أن تخطط أيضًا من أجل المستقبل، أم أنها تتبع فقط قواعد ثابتة، حددتها عملية التطوُّر؟ ومن ثَم قرر الباحثون استخدام الحمام في تجارب مختبرية قدمت لها مسارات مصمَّمة على غرار مسألة البائع المتجول، وهي مسارات بسيطة تتكون من وجهتين أو ثلاث وجهات؛ في كل منها إناء ماء وطعام. ويبدأ الحمام مساره من موقع محدد، وينتقل إلى كل وجهة وفق ترتيب ما، ثم

يواصل حتى يصل إلى الوجهة النهائية. واستنتج الفريق أن «الحمام أمكنه إجراء تقديرات دقيقة لمدى قرب الموقع التالي، ولكن بدا أنه يخطط على نحو مسبق لخطوات متعددة عندما بدا أن مشقة الانتقال ستصبح كبيرة إذا سلك مسارات غير فعالة. وقدمت النتائج أدلة واضحة وقوية على أن هناك حيوانات لا تنتمي لرتبة الرئيسيات يمكنها التخطيط لمسارات انتقالٍ معقَّدة».

وخلال استضافتهم في أحد الحوارات، شرح الباحثون صلة بحثهم بقصة الحمامة التي تقود حافلة. واقترحوا أن السائق ربما كان لديه سببان للاعتراض: السبب الواضح وهو السلامة، والسبب الثاني هو القلق من أن الحمامة لن تصبح قادرة على اتِّباع مسار من شأنه أن يسمح لجميع الركاب أن يستقلوا الحافلة عبر خط سيرها في المدينة. ومثلما يشير عنوان الورقة البحثية، استنتج الفريق من تجاربه أن السبب الثاني، وهو القلق، كان غير مبرَّر.

إذن، فلندَع الحمامة تقود الحافلة.

إذا واصلت الحكومات وشركات تصنيع السيارات توجهاتهما الحالية، فإنه في المستقبل القريب لن يقود الحافلة أي من السائق أو الحمامة. بدلًا من ذلك، فإن الحافلة هي ما ستقود نفسها. إذ إننا نتَّجه سريعًا إلى العصر الجديد الرائع للمَركبات ذاتية القيادة.

أو ربما لا.

إن الجانب الأكثر صعوبة الذي يجب دراسته قبل تعميم استخدام المركبات ذاتية القيادة هو التأكد من أنها تستطيع تفسير العناصر المحيطة بها على نحو صحيح. من السهل تزويد تلك المركبات بـ «عيون» خاصة بها، لأن الكاميرات الصغيرة عالية الدقة أصبحت تُصنع الآن بكميات هائلة. لكن الرؤية تحتاج إلى عقلٍ مثلما تحتاج إلى عينين، لذلك تزوَّد السيارات والشاحنات والحافلات ببرامج رؤية إلكترونية. ومن ثَم ستتمكن من إدراك ما الذي تنظر إليه، وتصبح قادرة على التصرف وفقًا لذلك.

وفقًا للمصنعين، فإن إحدى الميزات المحتملة للمركبات ذاتية القيادة هي السلامة. إذ يرتكب السائقون البشريون أخطاءً ويتسببون في وقوع حوادث. أما الكمبيوتر فلا يتعرض لتشتيت الانتباه، ومع إجراء ما يكفي من البحث والتطوير، ينبغي أن يصبح السائق الكمبيوتر أكثر أمانًا من أي إنسان. وهناك ميزة أخرى تتمثل في أنه لا يتعيَّن عليك أن تدفع راتبًا للحافلة من أجل قيادة نفسها. لكنَّ هناك عيبًا كبيرًا، إلى جانب التسبب في

فقدان السائقين لوظائفهم، وهو أن هذه التكنولوجيا لا تزال في مهدها، والأنظمة المتوفرة حاليًّا لا ترقى إلى مستوى الضجيج المحيط بهذه التكنولوجيا. فقد تعرَّض بالفعل عدد قليل من المارة وسائقي الاختبار إلى الموت في حوادث، ومع ذلك يجري الآن اختبار مركبات ذاتية القيادة على نحو كامل في شوارع المدن في العديد من البلدان. إن الأساس المنطقي الذي يستند إليه مؤيدو التجربة هو أنه يتعيَّن اختبار تلك المركبات في العالم الحقيقي، وأنها في نهاية المطاف سوف تصبح سببًا في إنقاذ حياة عدد من الناس أكبر مِن عدد مَن قد تقتلهم. ولقد كانت السرعة التي تقبلت بها الجهات التنظيمية تلك المحاجَّة المثير للجدل لافتة. فلو أن أحدًا اقترح إجراء اختبار دواء جديد على عينة عشوائية من الأشخاص، دون علمهم أو موافقتهم، على أساس أن هذا سينقذ حياة عدد من الناس أكبر من عدد من قد يقتلهم، فستظهر اعتراضات شديدة. في الواقع، سيصبح ذلك أمرًا مخالفًا للقانون في جميع البلدان تقريبًا، وبالقطع غير أخلاقي.

ومن أجل ذلك، أصبحت التكنولوجيا الأساسية للرؤية الإلكترونية هي مجال التعلُّم الآلي الأكثر شهرة. إذ تُدرب شبكة تعلم عميق، توائم قوة الارتباطات الخاصة بها؛ بحيث تستطيع التعرف على الصور بشكل صحيح، باستخدام عدد كبير من الصور حتى تصل إلى مستوًى مقبول من الدقة. وقد كان هذا الإجراء ناجحًا للغاية في مجموعة واسعة من التطبيقات. ومع ذلك، في عام ٢٠١٣، أصبح من الواضح أن الكثير من الاهتمام موجه إلى نجاحات التعلُّم الآلي، والقليل جدًّا إلى إخفاقاته المحتملة. لكن تتمثل إحدى المشكلات الخطيرة في «الأمثلة العدائية»، أي الصور التي جرى تعديلُها عن عمد، والتي يستطيع الإنسان على نحو صحيح اكتشاف أنها معدَّلة، ولكن الكمبيوتر يخطئ في ذلك بشكل مذهل.

يعرض الشكل التالي صورتين لنفس القطة. وهذا أمر واضح. إنهما مختلفتان فقط في بعض البكسلات القليلة، وبالنسبة للعين البشرية تبدوان متطابقتين. وعند عرض الصورتين على شبكةٍ عصبية قياسية، مدرَّبة على عدد ضخم من صور القطط وغير القطط، تتعرَّف بشكل صحيح على الصورة اليمنى وتحدد أنها صورة قطة. ومع ذلك، تصر على أن الصورة اليسرى هي صورة جواكامولي، وهي صلصة مكسيكية خضراء مصنوعة من الأفوكادو. في الواقع، إن الكمبيوتر واثق بنسبة ٩٩٪ من أنها صورة صلصة جواكامولي، مقارنة بنسبة وثوق تبلغ ٨٨٪ فقط من أنها قطة. وكما تقول المقولة المعروفة، إن الكمبيوتر هو جهاز يرتكب ملايين الأخطاء بسرعة كبيرة للغاية.

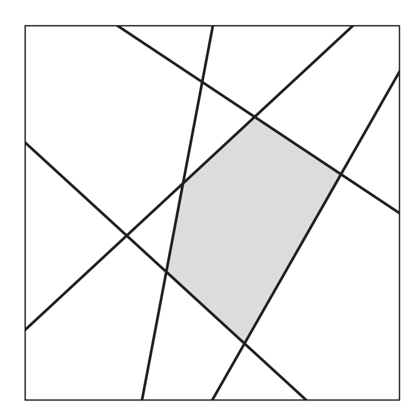



صورتان، تختلفان في بضعة بكسلات فقط، جرى عرضهما على الإصدار الثالث من شبكة «إنسيبشن» (InceptionV3)، التي صنفت الصورة اليمنى على أنها قطة، والصورة اليسرى على أنها صلصة جواكامولي.

توصف الصور من هذا النوع بأنها «عدائية» لأنها تنشأ عندما يحاول شخص ما عن عَمد خداع النظام. في واقع الأمر، سوف يدرك الكمبيوتر أن معظم الصور من هذا النوع هي صورة قطة. وقد لاحظ كريستيان زيجدي وزملاؤه ظهور مثل هذه الصور في عام ٢٠١٣.[14] وفي عام ٢٠١٨، فسر آدي شامير وزملاؤه[15] سبب إمكانية ظهور تلك الأمثلة في أنظمة التعلم العميق، وسبب حتمية ظهورها، وسبب أن كل ما يتطلبه الأمر هو تغيير عدد قليل من البكسلات لتضليل الشبكة العصبية.

السبب الأساسي لهذه القابلية للتعرض لأخطاء كبيرة هو البُعد. إذ إن الطريقة المعتادة لقياس مدى اختلاف سلسلتين من سلاسل البتات المختلفة هي إيجاد مسافة هامنج الخاصة بهما؛ التي تحدد عدد البتات التي يجب تبديلها لتحويل إحداها إلى الأخرى. لذلك، على سبيل المثال، فإن مسافة هامنج بين ١٠٠٠١١٠١٠٠١ و١٠١٠١٠٠١١١١ هي أربعة، والبتات المختلفة هي الأرقام الأربعة المميزة بخط عريض في السلسلة ١٠١٠١٠٠١١١١. يجري تمثيل صورة ما في الكمبيوتر على هيئة سلسلة بتات طويلة للغاية. إذا كان حجم الصورة هو ١ ميجابايت، فإن طولها هو ٢٢٣، أو نحو ٨ ملايين بت. ومن ثَم فإن فراغ الصور له بعد يساوي ٨ ملايين، على الحقل المنتهي الذي يتكون من ٠ و١. وهو يحتوي على ٢٨٣٨٨٦٠٨ نقطة مختلفة.

يجب أن تضع خوارزمية التعرف على الصور في الشبكة العصبية المدرَّبة كل صورة في هذا الفراغ داخل عدد أقل بكثير من الفئات. في أبسط الحالات، يتمثَّل هذا في تقسيم فراغ الصور إلى نطاقات عن طريق رسم مستويات فائقة، وهو إجراء موضَّح مع فراغ ثنائي الأبعاد في الشكل التالي. وهذا يقسم الفراغ إلى خلايا عديدة، واحدة لكل فئة. إذا غيرنا الصورة إلى أخرى بمسافة هامنج تساوي، على سبيل المثال، ٤٠، فإننا نغير فقط ٤٠ بتًا في الصورة. وتتلقى العين ٨ ملايين بت، وهذا يمثل نسبة ٠٫٠٠٠٥٪ من البتات، أي أقل بكثير من العتَبة التي تلاحظ عندها عين الإنسان أي فرق كبير. ومع ذلك، فإن عدد الصور عند مسافة هامنج هذه يكون ٢٥٠، أي نحو ١ كوادريليون. هذا أكبر بكثير من عدد الفئات التي يمكن أن يميزها نظام الرؤية الإلكتروني. لذلك ليس من المستغرب أن يؤدي تغيير بسيط في الصورة مثل هذا إلى جعل الكمبيوتر يراها على نحو خاطئ.



تقسيم فراغ الصورة إلى مستويات فائقة. هنا عدد الأبعاد هو اثنان، وعدد المستويات الفائقة خمسة (هنا تبدو على هيئة خطوط) وهي تقسمه إلى ١٣ خلية. تظهر هنا إحداها مظلَّلة.

من أجل التحليل الرياضي، من المناسب تمثيل سلاسل البتات كأعداد حقيقية وليس عبر حقل منتهٍ. على سبيل المثال، يمكن اعتبار بايت واحد يتكون من ثمانية بتات، مثل ١٠٠٠١١٠١، العدد الحقيقي بالمفكوك الثنائي ٠٫١٠٠٠١١٠١. الآن، يصبح فراغ جميع الصور التي حجمها ١ ميجابايت فراغًا متجهيًّا حقيقيًّا له أبعاد تساوي مليونًا. ومن خلال هذا التعديل، يثبت شامير وزملاؤه شيئًا أهم بكثير. فعند النظر إلى صورة في

إحدى خلايا ترتيب المستويات الفائقة، وكذلك لخلية ثانية، كم عدد البتات التي نحتاج إلى تغييرها في الصورة من أجل تحريكها إلى الخلية الثانية؟ يوضح التحليل الخاص بهم أنه، على سبيل المثال، إذا قُسم فراغ الصورة إلى مليون خلية باستخدام ٢٠ مستوًى فائقًا، فحينئذٍ يجب تغيير إحداثيَّين فقط لتحريك نقطة معينة إلى أي خلية، شريطة أن يكون عدد أبعاد فراغ الصورة أكثر من ٢٥٠. وبوجه عام، إذا جرى تدريب الشبكة على التمييز بين عدد معين من الفئات، فإن عدد الإحداثيات التي يجب تغييرها لتحريك صورة معينة إلى «أي» فئة يساوي تقريبًا عدد الفئات.

وقد اختبروا هذه المبرهنة على نظام تجاري للتعرف على الأعداد. يوجد هنا عشر فئات، الأعداد من ٠ إلى ٩. لقد أنتجوا صورًا عدائية يمكن أن تحثَّ النظام على التعرف إلى العدد ٧ باعتباره أيًّا من الاحتمالات العشرة للأعداد بين ٠ و٩. ويتطلَّب الأمر تغيير ١١ بتًّا فقط لتحقيق ذلك. ينطبق الشيء نفسه على أي عدد آخر غير ٧.

هل ينبغي أن نشعر بالقلق؟ إن الصور «الطبيعية»، من النوع الذي ستواجهه عادةً سيارتُنا ذاتية القيادة، لا تنشأ عن عمد لخداع النظام. ومع ذلك، ستلاحظ السيارة نحو نصف مليون صورة يوميًّا، ولا يتطلب الأمر سوى تفسير خاطئ واحد فقط كي يتسبب في وقوع حادث. إن التهديد الرئيسي هو أن المخربين أو الإرهابيين يمكنهم بكل سهولة تعديل علامات الطرق عن طريق إضافة قِطَع صغيرة من الشريط الأسود أو الأبيض، وخداع الكمبيوتر كي يظن أن علامة التوقُّف هي في الواقع علامة ضرورة عدم تجاوز حد السرعة ٦٠ ميلًا في الساعة. كل ذلك يضيف إلى الشعور بأن البدء في تشغيل السيارات ذاتية القيادة على أرض الواقع قد شابهُ التعجل على نحو غير ضروري وغير آمن بسبب الضغوط التجارية. إذا كنت لا توافقني الرأي، فاسمح لي أن أكرر ما قلته: نحن لن نطرح «أبدًا» دواءً جديدًا أو إجراءً طبيًّا بهذه الطريقة المتهورة. خاصة إذا كانت هناك أسباب وجيهة للشك في أنه قد تصبح له تبعات خطيرة.

لا تدع الحافلة تقود الحافلة.

الفصل الرابع

مسألة كونيجسبرج وزرع الكُلى

> بالإضافة إلى ذلك الفرع من الهندسة الذي يهتم بالمقادير، هناك فرع آخر، كان أول من توصَّل إليه هو العالم لايبنتس، وأطلق عليه اسم هندسة الموضع ... ومن ثَم، عندما ذكرَت مؤخرًا إحدى المشكلات، التي بدت هندسية ولكنها لم تتطلب قياس مسافة، لم يكن لديَّ شك في أنها كانت ذات صلة بهندسة الموضع. لذلك قررت أن أوضح هنا الطريقة التي توصلت إليها من أجل حل هذا النوع من المشكلات.
>
> ليونهارت أويلر، الورقة البحثية
> «حل مشكلة مرتبطة بهندسة الموضع»، ١٧٣٦

على امتداد معظم فترات تاريخ البشرية، كانت أعضاء جسد الشخص التي تولد معه تموت أيضًا معه، وغالبًا ما تكون السببَ في موته. فإذا ما أُصيب قلبك، أو كبدك، أو رئتاك، أو أمعاؤك، أو معدتك، أو كليتاك، بمرض يؤدي إلى فشله في أداء وظيفته، فستفشل أنت أيضًا في الاستمرار على قيد الحياة. كان من الممكن أن تتعرَّض بعض أجزاء الجسد للبتر جراحيًّا، خاصة الذراعان والساقان، وإذا نجوت من هذه التجربة، فيمكن أن تعيش حياة صعبة بعض الشيء. إن اختراع مواد التخدير وأساليب التعقيم في غرف العمليات جعل إجراء العمليات أقل إيلامًا للمرضى، على الأقل أثناء إجرائها بينما هم غائبون عن الوعي، وزاد بشكل كبير من فرص بقائهم على قيد الحياة. وبعد اكتشاف المضادات الحيوية، أصبح من الممكن علاج الأمراض المعدية التي كانت قاتلة في السابق.

نحن نتعامل مع معجزات الطب الحديث هذه كأمر مسلَّم به، لكنها منحت، للمرة الأولى على نحو أساسي، الأطباء والجراحين إمكانية «علاج» الأمراض. وقد عملنا على

تبديد معظم مزايا المضادات الحيوية من خلال إعطائها للحيوانات الداجنة على نطاق واسع؛ ليس لعلاج مرض ما، ولكن كي يزداد حجمها في أسرع وقت ممكن. وكذلك من خلال الملايين من الأشخاص الذين يوقفون العلاج بالمضادات الحيوية بمجرد أن يشعروا بتحسن، بدلًا من الاستمرار في تناولها وفق البرنامج العلاجي الكامل كما أخبرهم الطبيب. شجَّعت هاتان الممارستان، غير الضروريتين تمامًا، على تطوير البكتيريا لمقاومة للمضادات الحيوية. ومن ثَم يحاول العلماء الآن على نحو محموم أن يتوصَّلوا إلى الجيل التالي من المضادات الحيوية. وإذا فعلوا ذلك، آملُ أن نصبح على قدر من الوعي بحيث لا نفسد مزاياها هي أيضًا.

وقد تحقَّق حلمٌ آخر أيضًا من أحلام الجراحين في الماضي، وهو: عمليات زرع الأعضاء. حتى الآن يبدو أننا تمكنَّا من الحفاظ على هذا الكشف العلمي المتميز، ولم نبدد مزاياه هو الآخر. إذا كانت الظروف مواتية، فيمكنك الحصول على قلب جديد أو رئة جديدة أو كُلْية جديدة. وحتى وجه جديد أيضًا. وفي يوم ما، قد يجري إنماء عضو بديل من أجلك في جسد خنزير، على الرغم من أن هذا لن يحدث على نحو طوعي.

في عام ١٩٠٧، تكهَّن الباحث الطبي الأمريكي سايمون فليكسنر بشأن مستقبل الطب، واقترح أنه سيكون من الممكن جراحيًّا أن يُستبدل بأعضاء مريضة لشخص ما أعضاءً سليمة لشخص آخر. وعلى وجه الخصوص ذكر الشرايين والقلب والمِعدة والكليتين. وقد أجريت أول عملية زرع كُلًى في عام ١٩٣٣ من قِبل الجراح الأوكراني يوري فوروني، الذي استأصل كلية من متبرع تُوفي قبل ست ساعات وزرعها في فخذ المريض الذي يعالجه. ولكن توفي المريض بعد يومين عندما رفض جسده الكلية الجديدة لأن فصيلة دم المتبرع غير متوافقة مع فصيلة دم المتلقي. إن أكبر عقبة أمام نجاح زرع الأعضاء هي الجهاز المناعي للجسم، الذي يعتبر أن العضو الجديد ليس جزءًا من جسم المريض، ويهاجمه. وقد أجرى أول عملية زرع كلية ناجحة ريتشارد لولر في عام ١٩٥٠. واستمرت الكلية المتبرَّع بها في جسد المريضة المتلقية لمدة عشرة أشهر إلى أن رفضها، ولكن بحلول ذلك الوقت كانت قد تعافت كليتاها على نحو أتاح لها العيش لمدة خمس سنوات أخرى.

إن الشخص الطبيعي لديه كليتان، ويمكن أن يؤدي جسده وظائفه على نحوٍ جيد للغاية باستخدام كلية واحدة منهما فقط. لذلك يمكن الحصول على كلية من متبرع حي وزرعها في جسد إنسانٍ آخر، وهو ما أدى إلى تبسيط العملية برُمتها. والكلية هي أسهل عضو يمكن زرعه في الجسد. إذ إنه من السهل التأكد من أنَّ نوع أنسجة المانح يتطابق

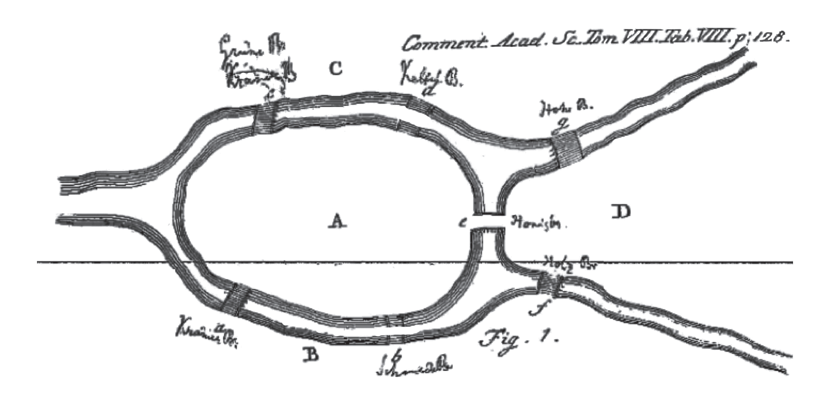
مع ذلك الخاص بأنسجة المتلقي، وتفادي رفض جسده للعضو الجديد، وإذا حدث خطأ ما، فهناك أجهزة غسيل الكلى التي تؤدي وظيفة الكلى. وإلى أن جرى التوصل إلى الأدوية المضادة لرفض الجسد للأنسجة الغريبة عنه، وهو ما حدث في عام ١٩٦٤، لم تكن هناك عمليات زرع كُلًى من المتبرعين المتوفَّين (على الأقل، في الولايات المتحدة الأمريكية والمملكة المتحدة). ولكن كان هناك الكثير من حالات التبرع من قبل المتطوعين الأحياء.

في معظم الحالات، كان المتبرع هو أحد الأقارب المقربين للمتلقي. وقد زاد هذا من احتمال حدوث توافق في الأنسجة، لكن السبب الرئيسي هو أن قِلة قليلة من الناس كانوا على استعداد للتضحية بكلية من أجل شخص غريب. ففي نهاية المطاف، عندما يتوفر في جسدك عضو بديل لعضو ما، يمكنك مواصلة عيش حياة طبيعية إذا أخفق هذا العضو في أداء وظيفته. وإذا كنت قد منحت إحدى كليتيك لشخص غريب، فستفقد هذه الميزة. لكن إذا كان الشخص المتلقي هو والدتك، أو شقيقك، أو ابنتك، فإن المكسب يفوق المخاطرة، خاصة إذا كنت تعلم أن المتلقي سيموت إذا رفضت. إن الأمر يكون شخصيًّا على نحو أقل إذا تعلَّق الأمر بشخص غريب، ويقل احتمال أن تعرض نفسك للمخاطرة.

تسمح بعض البلدان بتقديم حافز، وهو المال. فيمكنك أن تدفع مبلغًا ماليًّا لشخص غريب من أجل التبرع بكليةٍ لأحد أقاربك. إن مخاطر السماح لهذا النوع من المعاملات واضحة إلى حد ما؛ على سبيل المثال، يمكن إغراء الفقراء بالمال من أجل بيع كلية لغريب غني. في المملكة المتحدة، كان من غير القانوني التبرع بكلية لأي شخص لا تجمعك به صلة قرابة وثيقة. ثم ألغَى القانونان الصادران في عامي ٢٠٠٤ و٢٠٠٦ ذلك القيد، لكنهما أضافا ضمانات لمنع التجاوزات. أحدها كان «لا أموال مقابل التبرع».

مهَّد التغيير في القانون الطريق لاكتشاف استراتيجيات جديدة تبحث في مدى توافق أعضاء المانحين مع أعضاء المتلقِّين، مما يجعل من الممكن علاج المزيد من المرضى. كما مهَّد لظهور مجموعة كبيرة من المسائل الرياضية المتعلقة بكيفية استخدام هذه الاستراتيجيات بكفاءة. وقد تصادف أن الأدوات القوية لحل هذه المسائل موجودة بالفعل. ومن اللافت للنظر أن كل شيء بدأ بلُغز صغير سخيف، منذ ما يقرب من ٣٠٠ عام.

إنها قصة معروفة جدًّا، لكنني سأحكيها على أي حال، لسببين. فهي توفر الأساس الرياضي لما سأتناوله هنا، كما أنه من الشائع تداولها على نحو محرَّف. وقد فعلت ذلك من قَبل بالتأكيد.



الرسم البياني التخطيطي لجسور كونيجسبرج السبعة الذي وضعه أويلر.

إن مدينة كالينينجراد، التي تقع اليوم في روسيا، كانت تُسمى فيما مضى كونيجسبرج. وفي القرن الثامن عشر، كانت تقع في بروسيا. كان يتدفق نهر بريجل عبر المدينة، وكانت هناك جزيرتان، كنايبوف ولومس. وكانت هناك سبعة جسور. وقد رُبطت كل ضفة من النهر بجزيرة كنايبوف بواسطة جسرين؛ وربطت كل ضفة بجزيرة لومس بواسطة جسر واحد؛ وفي النهاية، رُبطت الجزيرتان بجسر واحد. لكن خريطة المدينة اليوم مختلفة إلى حد ما. فقد قُصفت المدينة في الحرب العالمية الثانية ودُمر الجسران B وD الموضحان في الشكل التالي. وهُدم الجسران A وC من أجل إنشاء طريق جديد، وأعيد بناؤهما مرة أخرى. وجنبًا إلى جنب مع الجسور الأصلية الثلاثة المتبقية، التي أُعيد بناء أحدها في عام ١٩٣٥، هناك الآن خمسة جسور في المواقع الأصلية.

تقول الأسطورة إن المواطنين الصالحين في كونيجسبرج تساءلوا لفترة طويلة عما إذا كان من الممكن اتخاذ مسارٍ للتجول مشيًا عبر المدينة يمر بكل جسر مرة واحدة فقط. لقد كان لغزًا صغيرًا وبسيطًا، وهو من النوع الذي تتوقع رؤيته في الوقت الحاضر على صفحة الألغاز في جريدتك أو نسختها الإلكترونية. لا تُسفر تجربة المسارات المختلفة عن أي حلول؛ ويمكن أن تجرب ذلك بنفسك. ومع ذلك، فإن مسائل مماثلة لها حل، وهو أحيانًا حل يصعب إيجاده. علاوة على ذلك، فإن عدد المسارات التي قد تسلكها لا حصر لها، إذا كان فقط بسبب أن هناك طرقًا لا حصر لها للتجول من جانب إلى آخر، أو ذهابًا

وإيابًا، وأنت تمشي على طول مسارٍ ما. لذلك لا يمكنك إيجاد حل، أو إثبات أنه لا يوجد حل، من خلال فحص كل مسارٍ ممكن.

يمكنك حل اللغز بسهولة بتدبير حيلةٍ ما. على سبيل المثال، يمكنك المشي على جسرٍ ما، ثم الالتفاف، والخروج منه، دون أن تتجاوز فعليًّا طرفه الآخر، وتدَّعي أنك قد «عبرت» الجسر. يجب تعريف شرط «العبور» بشكل صريح بحيث لا يُسمح بمثل هذه الحيل. وبالمثل، يجب تعريف شرط «المشي»، وأنه لا يمكنك القيام بجزء من الرحلة عن طريق السباحة، أو ركوب قارب، أو الطيران في بالون طائر، أو الانتقال عبر الزمن باستخدام آلة «دكتور هو». أو الإبحار لأعلى النهر للعثور على جسر غير موجود في صورة أويلر. يعرف عشاق هذه الألغاز أنه على الرغم من أن التلاعُب على هذا النحو قد يكون ممتعًا، ويتطلب حتى براعة كبيرة، فإن هذا يُعد نوعًا من الغش. لن أذكر كل شرط مطلوب لاستبعاد هذا النوع من الخداع. فأنا مُهتَم أكثر بكثير بكيفية إثبات أن اللغز، بعد أن أعيدت صياغته رياضيًّا على نحو مناسب، يمكن أن يصبح غير قابل للحل «ما لم» نستخدم الخداع. يدور الخداع حول كيف يمكن صياغة المسألة، وليس حول حلها أو إثبات أنها غير قابلة للحل بمجرد صياغتها.

هنا يأتي دور أويلر، عالم الرياضيات الرائد في عصره. لقد عمل في كل مجال من مجالات الرياضيات المعروفة تقريبًا حينها، وكذلك في مجالات لم تكن معروفة حتى تطرَّق هو إليها، وطبَّق المبادئ الرياضية ليحل مجموعة كبيرة ومتنوعة من المسائل الواقعية. وقد تنوعت مؤلفاته بين كتب مهمة في المجالات الرئيسية للرياضيات البحتة والفيزياء الرياضية وأعمالٍ أقل أهمية حول موضوعات متفردة وغريبة تَصادف أن استرعت انتباهه. وفي أوائل القرن الثامن عشر، ركز تفكيره على اللغز الخاص بجسور كونيجسبرج. وقد صاغه على هيئة مسألة رياضية دقيقة، وتوصل إلى إثبات على أنه، كما ذكر، لا حل له، وأن مثل هذا المسار لا يمكن إيجاده. هذا صحيح حتى لو أنه ليس مسارًا دائريًّا، ولكن ينتهي في مكان ما مختلف عن المكان الذي يبدأ فيه.

كان أويلر قد انتقل إلى سان بطرسبرج في روسيا عام ١٧٢٧، عندما كانت تحكم روسيا الإمبراطورة كاثرين الأولى، ليصبح عالم الرياضيات الخاص بالبلاط. وكان قد أسس زوجها، الإمبراطور بطرس الأول، أكاديمية سان بطرسبرج (أكاديمية بطرسبرج الملكية للعلوم) في عام ١٧٢٤–١٧٢٥ ، لكنه تُوفي قبل أن تخرج إلى النور. وقدم أويلر بحثه إلى الأكاديمية في عام ١٧٣٥، ونُشر بعد ذلك بعام. ونظرًا لكونه عالم رياضيات، يمكن

القول إنه الأكثر غزارة في الإنتاج في التاريخ، فقد استخلص من اللغز قدر استطاعته من الأمور؛ إذ توصل لشروط ضرورية وكافية لإيجاد حل، ليس فقط لمسألة جسور كونيجسبرج، ولكن لأي مسألة من نوع مماثل. فيمكن أن تواجهك مسألة تتعلق بخمسين ألف جسر تربط بين أربعين ألفًا من الكتل الأرضية في ترتيبٍ معقَّد بشكل كبير، وستخبرك مبرهَنَة أويلر ما إذا كان يمكن إيجاد حل لها أم لا. وإذا درست الإثبات على نحو عميق، فستجد أنه يخبرك حتى بطريقة إيجاد حل، بعد القليل من البحث والتدقيق. كان تناول أويلر هزيلًا بعض الشيء، وقد استغرق الأمر ما يقرب من ١٥٠ عامًا قبل أن يعرض أي شخص جميع التفاصيل، على الرغم من أن الأمر ليس صعبًا للغاية.

في الوقت الحاضر، تخبرنا العديد من الكتب عن نظرية الرسم البياني أن أويلر أثبت أن هذا اللغز ليس له حل عن طريق اختزاله إلى مسألة تبدو أبسط عن «الرسوم البيانية». فالرسم البياني، بهذا المعنى، هو مجموعة من النقاط (تُسمى العُقَد أو الرءوس) التي تصل بينها خطوط (تُسمى الحواف)، لتشكل نوعًا من الشبكات.[1] إن إعادة الصياغة باستخدام الرسوم البيانية يحول مسألة جسور كونيجسبرج إلى مسألة تتبُّع مسارٍ عبر رسم بياني محدد يستخدم كل حافة مرة واحدة فقط. هذه بالتأكيد هي الطريقة التي نتعرض بها لتلك المسألة اليوم، لكن هذا ليس بالضبط ما فعله أويلر. إن التاريخ يُكتب هكذا. إذ يُسعِد مؤرخي الرياضيات إخبارُك بتسلسل الأحداث الفعلي، وليس ما تقوله القصة الأصلية. في الواقع، لقد توصل أويلر إلى حل المسألة بأكملها رمزيًّا.[2]

لقد رمز لكل منطقة من الأرض (جزيرة أو ضفة نهر) وكل جسر بحرف من الحروف الأبجدية. واستخدم الحروف الكبيرة A وB وC وD للمناطق والحروف الصغيرة a وb وc وd وe وf وg للجسور. ويربط كل جسر بين منطقتين مختلفتين، على سبيل المثال، يربط الجسر f بين المنطقة A والمنطقة D. ومن ثَم يبدأ مسار مشي ما من منطقة ما، ويمكن تحديده من خلال تسجيل المناطق التي يمر بها والجسور التي يعبرها، بالترتيب، مع الانتهاء عند آخر منطقة توقف عندها. عرض أويلر هذا في جانب كبير من بحثه، على نحو لفظي، وفي الغالب كان يتعامل مع تسلسلات المناطق. لا يهم ما الجسر الذي ستسلكه للانتقال من A إلى B؛ المهم فقط أن عدد تكرارات AB هو نفس عدد هذه الجسور. بدلًا من ذلك، يمكنك فقط استخدام تسلسل الجسور، بشرط أن تحدد مكان البدء، وتحسب عدد المرات التي تمر فيها بمنطقة معينة. يمكن القول إن هذا كان سيكون

أكثر بساطة. وقد استخدم الحروف الصغيرة والكبيرة قرب نهاية الورقة البحثية، مع إعطاء مثال يستخدم التسلسل التالي:

EaFbBcFdAeFfCgAhCiDkAmEnApBoElD

الذي يناظر نسقًا أكثر تعقيدًا.[3]

في هذه الصيغة، يصبح المسار الدقيق الذي يتبعه الشخص المتجول، في كل منطقة أو عبر كل جسر، غير مهم. فالشيء الوحيد الذي تحتاج إلى تتبعه هو التسلسل الذي من خلاله زار المناطق وعبر الجسور. ويُعرف عبور أحد الجسور من خلال «اختلاف الحرفين الكبيرين على كلا الجانبين». هذا يستبعد الدخول إلى الجسر والخروج منه مرة أخرى قبل الوصول للطرف الآخر. يكمن أحد الحلول هنا في تسلسل من الأحرف الكبيرة والصغيرة المتناوبة A–D وa–g؛ حيث يظهر كل حرف صغير مرة واحدة فقط، ويناظر الحرفان الكبيران قبل وبعد حرف صغير معين المنطقتين اللتين يربط بينهما.

يمكننا ذكر تلك الروابط لكل حرف صغير كما يلي:

a	يربط بين	A وB
b	يربط بين	A وB
c	يربط بين	A وC
d	يربط بين	A وC
e	يربط بين	A وD
f	يربط بين	B وD
g	يربط بين	C وD

لنفترض أننا سنبدأ من المنطقة B. هناك ثلاثة جسور تربط B بمنطقة أخرى، وهي: a أو b أو f. لنفترض أننا اخترنا f؛ إذن سيبدأ التسلسل بالرمزين Bf. إن المنطقة عند الطرف الآخر من f هي D، لذا لدينا الآن BfD. لا يزال هناك جسران يربطان D بمنطقة أخرى غير مستخدمَين هما e وg. (لا يمكننا استخدام f مرة أخرى.) لنجرب g، لذا فإن المسار الآن هو BfDg. الطرف الآخر من g هو C، مما يعطي BfdgC. الآن الجسران c وd هما السبيلان الوحيدان للمتابعة (لا يمكننا العودة إلى الوراء عبر g). ربما نحاول

استخدام الجسر c، الذي يؤدي إلى BfDgCc ثم BfDgccA. من المنطقة A هناك أربعة جسور محتملة هي a وb وd وe. (لقد استخدمنا c بالفعل.)

هل يمكننا الآن عبور d؟ كلا؛ لأن ذلك يعطي BfDgCcAd ثم BfDgCcadC. والآن، لقد استخدمنا بالفعل الجسور الثلاثة المرتبطة بالمنطقة C، وهي c وd وg. لكننا لم نحل اللغز حتى الآن؛ لأن المسار لم يمر عبر الجسر b. استبعد الجسر d. لأسباب مماثلة لا يمكننا الخروج عبر الجسر e؛ حيث سيأخذنا هذا إلى D، وسنصبح غير قادرين على المغادرة؛ علاوة على ذلك، لم نتمكن، مرة أخرى، من المرور عبر الجسر b. ماذا عن a؟ هذا يعطي BfDgCcAaB، والمخرج الوحيد غير المستخدم هو عبر b، مما يعطي BfDgCcAabbA. إن المَخرَجين الوحيدين الآن هما d أو e. يقود الأول إلى BfDgCcAaBbAdC، مع عدم وجود مخرج متبقٍّ، لكننا لم نعبر e. يقود الثاني إلى BfDgCcAaBbAeD، مع عدم وجود مخرج متبقٍّ، لكننا لم نعبر d.

حسنًا، لم تمكننا إذن سلسلة الخيارات هذه من إيجاد الحل المناسب، ولكن كان بإمكاننا اتخاذ خيارات مختلفة في وقت سابق. يمكننا الآن العمل بشكل منهجي عبر جميع التسلسلات الممكنة ... وسيتضح أن جميعها لن ينجح. إذ في مرحلةٍ ما سنصبح غير قادرين على مغادرة منطقة ما، نظرًا لعدم وجود مخرج مناسب، مع وجود جسر واحد على الأقل ما زلنا لم نعبره. إن قائمة التسلسلات المحتملة محدودة، وصغيرة بما يكفي لتدوينها بالكامل. جرب ذلك إذا كنت ترغب.

بافتراض أنك فعلت ذلك، فقد أثبت أن هذا اللغز ليس له حل. كان من الممكن أن يرضي ذلك مواطني كونيجسبرج، لكنه لم يرضِ أويلر. أولًا: ليس من الواضح «سبب» عدم القدرة على مغادرة منطقة ما دائمًا. ثانيًا: لا تخبرك الإجابة متى يمكن أو لا يمكن حل الألغاز الأخرى من نفس النوع. لذلك طرح أويلر أهم سؤال يطرحه علماء الرياضيات دائمًا عندما يحل شخص مسألة ما، وهو: «رائع، ولكن لماذا نجح ذلك؟» وأتبع ذلك بالسؤال التالي الأكثر أهمية: «هل يمكننا أن نفعل ما هو أفضل؟»

فكر أويلر أكثر في الأمر، وقدَّم ثلاث ملاحظات بسيطة، وهي كالتالي:

- إذا كان هناك حلٌّ ما، يجب أن تصبح كل منطقة مرتبطة بكل منطقة أخرى من خلال تسلسل «معين» من الجسور. على سبيل المثال، إذا كانت هناك جزيرتان أُخريان E وF متصلتان بعضهما ببعض عبر واحد أو أكثر من الجسور الجديدة h وi وj ... إلخ، مع عدم وجود جسور جديدة أخرى تربط هاتين الجزيرتين

بالمناطق الأخرى، فإن الطريق الوحيد لعبور هذه الجسور هي التنقل ذهابًا وإيابًا بين E وF. لذلك لا يمكنك الوصول إلى أي من الجسور الأخرى.

- بافتراض أن شرط «الارتباط» السابق قائم، فباستثناء المنطقتين في بداية ونهاية مسارك، كلما دخلت منطقة ما يجب عليك الخروج منها مرة أخرى عبر جسر مختلف.
- عندما تفعل ذلك، سيصبح الجسران المرتبطان بتلك المنطقة غير متاحين لك كي تسير عبرهما مرة أخرى.

ومن ثَم، وأنت تمشي عبر مسارك، فإنك تستخدم أزواجًا من الجسور. هذه هي النقطة الرئيسية التي يجب أن تدركها جيدًا. إذا كانت منطقة ما مرتبطة بعدد زوجي من الجسور، فيمكنك استخدامها جميعًا دون أن تصبح غير قادر على مغادرة تلك المنطقة. وإذا كانت مرتبطة بعدد فردي من الجسور، فيمكنك استخدام جميع الجسور باستثناء واحد دون أن تصبح غير قادر على مغادرة تلك المنطقة. لكن «سيتوجَّب عليك عبور ذلك الجسر» في مرحلة ما. وعندما تفعل ذلك، تصبح غير قادر على مغادرة المنطقة التي توجد بها.

إن عدم القدرة على مغادرة المنطقة التي توجد فيها هي أمر كارثي إذا كنت في وسط جولة افتراضية. لكن هذه ليست مشكلة إذا كنت في نهاية الجولة. كما أن عكس مسار الجولة بالسير للخلف ليس أيضًا مشكلة في بداية الجولة. يفترض هذا الخط من التفكير المنطقي ضمنيًّا أنه في حالة وجود جولة ما، يجب أن ترتبط منطقتان على الأكثر بعدد فردي من الجسور. وبالنسبة لمسألة كونيجسبرج:

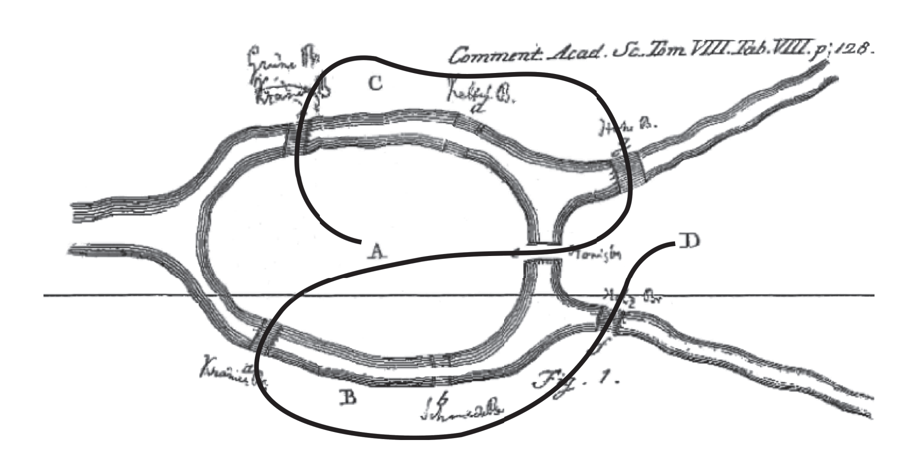
ترتبط A بخمسة جسور
ترتبط B بثلاثة جسور
ترتبط C بثلاثة جسور
ترتبط D بثلاثة جسور

لذلك فإن عدد المناطق المرتبطة بعدد فردي من الجسور هو أربعة، وهو أكثر من اثنين. لذلك لا يمكن أن تكون هناك جولة.

كما أوضح أويلر أيضًا، دون تقديم إثبات، أن نفس شرط العدد الفردي/الزوجي للجسور كافٍ لوجود مسار جولة. هذا أصعب قليلًا ولن أخوض في تفاصيله؛ فقد قدَّم

إثباتًا له كارل هيرهولزر قبل وفاته مباشرة في عام ١٨٧١، ونُشر بعد وفاته في عام ١٨٧٣. لاحظ أويلر أيضًا أنك إذا كنت تبحث عن مسار مغلق لجولة ما، ينتهي من حيث بدأ، فإن الشرط الضروري والكافي هو أن كل منطقة ترتبط بعدد فردي من الجسور.[4]

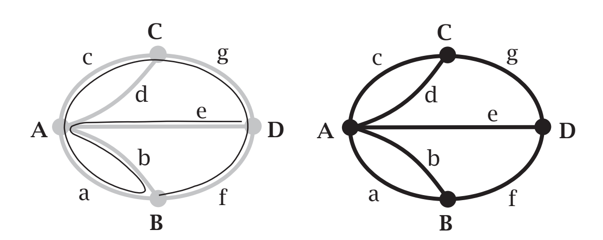
باستخدام الجسور الخمسة فقط التي (بشكل ما) ظلت قائمة حتى اليوم، فإن B وC يربط بينهما جسران. ومن ثَم يجب أن يصبح لهذه المسألة المعدَّلة حل، ولكن فقط بالنسبة لمسار جولة مغلق. ويجب أن تكون نقاط النهاية على A وD لأنهما لا تزالان مرتبطتين بعدد فردي من الجسور. تُظهر الصورة في الشكل التالي هذا الحل. وهناك المزيد من الحلول؛ فهل يمكنك إيجادها جميعًا؟



مسار جولة مفتوح يستخدم الجسور الخمسة التي لا تزال باقية.

صاغ أويلر كل المسارات السابقة على شكل تسلسلات رمزية مثل BfDgCcAaBbaeD. بعد ذلك بمدة، أدرك شخص ما أنه يمكنك إعطاء كل هذا تمثيلًا مرئيًّا. ولم يكن من السهل تحديد هويته على وجه الدقة، لأن الفكرة كانت منتشرة للغاية في منتصف القرن التاسع عشر، لكن جيمس جوزيف سيلفستر قدَّم مصطلح «الرسم البياني» في عام ١٨٧٨. ارسم صورة بها أربع نقاط A–D، وسبعة خطوط a–f. واجعل كل خط يصل بين المنطقتين عند طرف الجسر المقابل. وهكذا تصنع شكلًا مبسطًا لخريطة الجزر والجسور، كما في

الصورة اليمنى من الشكل التالي. والتسلسل الرمزي المذكور عاليه يناظر مسار الجولة المعروض في الصورة اليسرى من الشكل، الذي يبدأ من B وينتهي عند D، حيث يَعلق هناك.



الصورة اليمنى: رسم بياني يوضح خريطة المناطق والجسور في كونيجسبرج. الصورة اليسرى: نموذج لمحاولة تحديد مسار جولة ما، مع استبعاد الجسر d.

هذا التبسيط المرئي هو «الرسم البياني» لجسور كونيجسبرج. في هذا التمثيل، لا يهم المكان الذي تضع فيه النقاط الأربعة (على الرغم من أنها يجب أن تظل مميزةً لتجنُّب الخلط بينها)، والأشكال الدقيقة للخطوط لا تهم أيضًا. كل ما يُهم هو تحديد النقاط التي يربطها خط معين. في هذا المخطط المرئي، يصبح الإثبات الذي توصَّل إليه أويلر طبيعيًّا للغاية. إن أي مسار جولة يدخل منطقة ما عبر جسر ما يجب أن يخرج منها مرة أخرى عبر جسر آخر، إلا إذا كانت نهاية مسار جولة مغلق. وبالمثل، يجب أن يترك أي مسار جولة منطقة ما عبر جسر ما غير الذي دخلها عبره، إلا إذا كانت بداية مسار جولة مغلق. لذلك تُستخدم الجسور عبر المسار في أزواج إلا عند طرفي المسار. ومن ثَم، ترتبط المناطق التي لا تقع عند طرفي المسار بعدد زوجي من الجسور. إذا وُجد عدد فردي من الجسور عند طرفي المسار، يصبح المسار مفتوحًا ولا يمكن أن يصبح مغلقًا. بدلًا من ذلك، قد تكون بداية ونهاية المسار في نفس المنطقة، بحيث يمكن أن تربطهما معًا دون استخدام المزيد من الجسور الأخرى، مما ينشئ مسار جولة مغلقًا. والآن تصبح كل منطقة مرتبطة بعدد زوجي من الجسور.

إن أويلر، بحله لهذه الفئة المفردة من المسائل، تمكَّن من تقديم مجالين رئيسيين من الرياضيات. الأول هو نظرية الرسم البياني، التي تدرس النقاط المتصلة عبر خطوط.

هذا يبدو أمرًا بسيطًا، وطفوليًّا حتى. إنه هكذا بالفعل. وفي الوقت نفسه، هو عميق ومفيد وصعب، كما سنرى. والمجال الآخر هو الطوبولوجيا، الذي يُسمى أحيانًا «الهندسة المطاطية»، وفيه يمكن تغيير صورة الأشكال باستمرار دون اعتبارها قد اختلفت على نحو جوهري. هنا يمكن تغيير صورة أشكال الخطوط ومواقع النقاط بأي طريقة ترغب فيها، شريطة ألَّا تتغير الطريقة التي يرتبطان بها (وهو متطلب الاتصال)، وستحصل على الرسم البياني نفسه. هذا يعني أنه ينقل المعلومات نفسها عن الارتباط بين عناصره.

أجد أنه من اللافت للنظر أن لغزًا بسيطًا مثل هذا يمكن أن يقود إلى مثل هذه الابتكارات الكبيرة. إنها الفعالية اللامعقولة، في واقع الأمر. هناك أيضًا درس مهم، غالبًا ما يُخفق في فهمه من لا ينتمون لمجتمع الرياضيات. لا تقلل من شأن الرياضيات التي «تبدو» بسيطة، أي مثل لعبة أطفال أكثر من شيء جدِّي. ما يهم ليس مدى بساطة اللعبة؛ لكن ما بإمكانك أن تفعله بها. في الواقع، إن أحد الأهداف الأساسية للأفكار الرياضية الجيدة هو جعل كل شيء بسيطًا قدر الإمكان. (قد تضحك سخريةً من هذا، وهو ما لا يمكن لومك عليه، بالنظر إلى مدى التعقيد الذي تبدو عليه الكثير من الأفكار الرياضية. لكن يجب أن أضيف التحذير المنسوب إلى أينشتاين: بسيط قدر الإمكان، «لكن ليس أكثر من ذلك».) إن تمثيل الجزر بنقاط والجسور بخطوط لا يغير شيئًا في اللغز، لكنه سينزع عنه ما يشوبه من معلومات غير جوهرية؛ مثل: ما حالة الطقس؟ هل الأرض موحلة؟ هل هو جسر خشبي أم معدني؟ هذه الأشياء مهمة، إذا كنت ستخرج من أجل نزهة يوم الأحد أو تنوي بناء جسر. ولكن إذا كنت ترغب في الإجابة على السؤال الذي حير المواطنين الصالحين في كونيجسبرج، فهي معلومات غير ذات صلة.

ما علاقة جسور كونيجسبرج بعمليات زرع الكُلى؟ على نحو مباشر، ليس هناك ارتباط كبير. على نحو غير مباشر، ساهمت الورقة البحثية التي قدَّمها أويلر في تطوير نظرية الرسم البياني، والتي تقدم طريقة فعالة لاكتشاف مدى التوافق بين أنسجة المانحين والمتلقِّين حتى عندما يرغب المانحون في التبرع بالكلى إلى قريب من الدرجة الأولى.[5] عندما دخل قانون الأنسجة البشرية في المملكة المتحدة حيز التنفيذ في عام ٢٠٠٤، أصبح بإمكان البريطانيين التبرع على نحو قانوني بالكلى للمتلقين ممن هم ليسوا أقاربهم.

وهنا ظهرت مشكلة رئيسية وهي مدى التوافق بين أنسجة المانحين والمتلقين؛ لأنه حتى عندما يكون هناك متبرع، قد لا تتطابق أنسجة جسده وفصيلة دمه مع أنسجة

وفصيلة دم المتلقي المقصود. لنفترض أن العم فريد يحتاج إلى عملية زرع كلية، وابنه ويليام مستعد للتبرع، ولكن ليس لشخص غير قريب له. لسوء الحظ، إن كُلية ويليام أنسجتها غير متوافقة مع أنسجة كلية والده. قبل عام ٢٠٠٤، كانت تلك هي نهاية القصة، وسيظل فريد مضطرًّا إلى مداومة استخدام آلة غسيل الكُلى. وكذلك كان حال العديد من المتلقين المحتملين الآخرين الذين تتطابق أنواع أنسجتهم مع أنسجة ويليام. لنفترض الآن أن جون سميث، الذي لا تربطه صلة قرابة بفريد وويليام، لديه نفس المشكلة؛ إذ تحتاج أخته إيميلي إلى عملية زرع كلية، وهو على استعداد للتبرع بها، ولكن مرة أخرى، ليس لشخص غير ذي قُربى. ومرة أخرى يختلف نوع أنسجته عن ذلك الخاص بإيميلي. لذلك لا يمكن لأحد الحصول على عملية زرع كلية.

ومع ذلك، لنفترض أن نوع أنسجة جون يتطابق مع نوع أنسجة فريد، ونوع أنسجة ويليام يطابق ذلك الخاص بإيميلي. بعد عام ٢٠٠٤، يُلبي هذا الوضع شروطًا مناسبة لعملية مبادلة الكلى على نحو قانوني. إذ يمكن للجراحين المعنيين أن يجتمعوا معًا، ويقترحوا أن يمنح جون كليته لفريد، بشرط أن يمنح ويليام كليته لإيميلي. من المرجح أن يوافق كلا المانحين على مثل هذا الترتيب، لأن كلًّا من قريبيهما سيحصل على كلية جديدة، وسيمنح كل واحد منهما كليته وفق الشرط الذي كانا على استعداد دائمًا لتحقيقه وهو أن تكون عملية المنح لصالح قريب لهما. أما مَن الذي سيحصل تحديدًا على كلية مَن، فإن هذا لن يُحدث فرقًا كبيرًا عند المانحين أو المتلقِّين، على الرغم من أنه مهم للغاية لتطابق أنواع الأنسجة.

في ظل وسائل الاتصالات الحديثة المتوفرة في عصرنا هذا، يمكن للجراحين معرفة متى يحدث هذا النوع من التوافق العرضي من خلال الحفاظ على سجل للمانحين والمتلقين المحتملين، إلى جانب معلومات عن أنواع أنسجتهم. عندما يكون عدد المتلقين والمانحين المحتملين صغيرًا، تصبح احتمالات حدوث هذا النوع المريح من المبادلة ضئيلة، ولكن كلما زادت الأعداد أصبحت الاحتمالات أكبر. إن عدد المتلقين المحتملين ضخم للغاية؛ في عام ٢٠١٧ في المملكة المتحدة، كان أكثر من خمسة آلاف شخص على قائمة الانتظار للحصول على كلية جديدة. إنها يمكن أن تأتي من مانح متوفًّى أو حي، لكن عدد المانحين أصغر — نحو ألفي شخص في ذلك الوقت — مما يؤدي إلى فترة انتظار تتجاوز العامين للشخص البالغ وتسعة أشهر للطفل.

هناك طريقة واحدة لضمان استفادة المزيد من المرضى، وحصولهم على العلاج بسرعة أكبر، وهي إنشاء سلاسل أكثر تفصيلًا لعمليات تبادل الكلى. يسمح القانون الآن بهذا

الإجراء أيضًا. لنفترض أن أميليا، وبرنارد، وكارول، وديردري كلهم بحاجة إلى كُلًى. لديهم جميعًا مانحون يرغبون على نحوٍ مبدئي في التبرع لهم، ولكن لهم هم فقط. لنفترض أن أسماءهم هي ألبرت، وبيريل، وتشارلي، وديانا. تبدأ السلسلة بمانحة إيثارية هي زوي، التي يسعدها التبرع بكلية لأي شخص. لنفترض أن أنواع الأنسجة تسمح بسلسلة من النوع التالي:

زوي تتبرع لأميليا.
يوافق متبرع أميليا، وهو ألبرت، على التبرع لبرنارد.
توافق متبرعة برنارد، وهي بيريل، على التبرع لكارول.
يوافق متبرع كارول، وهو تشارلي، على التبرع إلى ديردري.
توافق متبرعة ديردري، وهي ديانا، على التبرع لقائمة الانتظار.

لقد أصبح الجميع، إجمالًا، راضين. أميليا، وبرنارد، وكارول، وديردري سيحصلون على كلًى جديدة. ألبرت، وبيريل، وتشارلي، وديانا جميعهم سيتبرعون بكُلاهم؛ ليس لأقاربهم، ولكن كجزء من سلسلة ستفيد قريبهم. غالبًا ما سيصبحون سعداء بهذا، وهو ما يجعل مثل هذه المعاملات ممكنة؛ في الواقع، إذا كان أحدهم لا يوافق، فلن يحصل قريبه على كلية في هذه الحالة. يسعد زوي أن تبرعها الإيثاري سيفيد شخصًا ما، ولا يهمها من هو. في هذه الحالة، ذلك الشخص هو أميليا. في النهاية، ستُمنح كلية إضافية إلى قائمة الانتظار؛ وهو أمر مفيد دائمًا.

إذا تبرعت زوي بدلًا من ذلك إلى قائمة الانتظار، فإن الطريقة الوحيدة لأميليا وبرنارد وكارول وديردري للحصول على الكلى هي الانضمام إلى قائمة الانتظار. ومن خلال عدم فعل ذلك، فإنهم يوفرون أربع كلًى أخرى لمن يحتاجها في قائمة الانتظار. يُطلق على هذه العملية «سلسلة التبرع التبادلي الشبيهة بقطع الدومينو المتراصَّة». حيث تدفع زوي قطعة دومينو كي تقع على أخرى بجوارها، فتقع سلسلة كاملة من قطع الدومينو المتراصة. دعنا نختصر ذلك الاسم إلى كلمة «سلسلة».

ما يهم هنا ليس الأسماء، ولكن أنواع الأنسجة. ألبرت هو أي شخص لديه نفس نوع الأنسجة مثل زوي. بيتي هو أي شخص لديه نفس نوع الأنسجة مثل «مانح» ألبرت، وتشارلي هو أي شخص لديه نفس نوع الأنسجة مثل مانح بيتي، وهكذا. ومع وجود أعداد معقولة من المتلقين والمانحين، فإن هذه السلاسل تكون كثيرة، ويمكن للجراحين

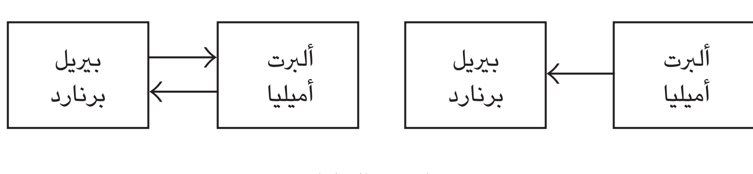
اكتشافها. لكن هذا يستغرق وقتًا، حتى لو أوكلوا المهمة لمن يساعدهم، وكل كلية ثمينة، لذلك من المنطقي اختيار السلاسل بأفضل طريقة ممكنة. هذا أمر معقَّد؛ لأن العديد من السلاسل المحتملة يمكن أن تتزامن في وجودها. إذا كان الأمر كذلك، فيمكن للجراحين العمل مع أكثر من سلسلة في الوقت نفسه، ما لم تحتوِ سلسلتان على المانح نفسه، مما يعني أن عليه التبرع لشخصين مختلفين. حينها، ستُكسر إحدى السلسلتين.

تحسين اختيار السلاسل ... حسنًا. تبدو تلك مسألة ملائمة كي تدرسها الرياضيات. إذا تمكنت من صياغة المسألة بشكل رياضي، وتطبيق أساليب مناسبة، فربما يمكنك حلها. علاوة على ذلك، ليس من الضروري أن يكون الحل مثاليًّا. فقط أفضل من أي شيء يمكن أن تصل إليه عن طريق التخمين. ومن ثَم، وجد ديفيد مانلاف طريقة لتحويل مسألة تبادل الكلى إلى سؤال حول رسم بياني. لكن مبرهنة أويلر لا تساعد في حله؛ فقد كان دوره هو إيجاد المجال بأكمله. على مدى السنوات التالية، طوَّر علماء الرياضيات المجال وابتكروا العديد من الأساليب الجديدة الخاصة بنظرية الرسم البياني. ولأن الرسم البياني هو كائن مكون من أجزاء منفصلة؛ مجرد قائمة من العُقد والحواف، ومعلومات عن أي الحواف تصل بين أي العُقد، فإن الرسوم البيانية مناسبة بشكل بارز للتحليل من قِبَل الكمبيوتر. وقد طُوِّرت خوارزميات رائعة لتحليل الرسوم البيانية واستخراج أنماط مفيدة. من بينها خوارزميات يمكنها التوفيق المثالي بين المانحين والمرضى، وذلك بالنسبة للرسومات البيانية ذات الحجم العملي. وتُستخدم هذه الأساليب، التي ينفذها الكمبيوتر، على نحو معتادٍ الآن في المملكة المتحدة.

إن الأزواج المتوافقة من المانحين والمتلقِّين سهلة: تبديل الكُلى الخاصة بهم. هذا يتطلب اثنين من الجراحين يعملان في نفس الوقت، أحدهما على كل شخص. لذلك يمكننا تجاهل الأزواج المتوافقة عند محاولة إيجاد السلاسل، والتركيز على الأزواج غير المتوافقة. تلك الأزواج تمثل العُقَد في الرسم البياني.

على سبيل المثال، لنفترض أن ألبرت على استعداد للتبرع لأميليا، ولكنه متوافق في الأنسجة مع برنارد. يمكننا تمثيل هذا الموقف من خلال الشكل الأيمن من الشكل التالي. لقد وضعت اسم المانح بالأعلى وقريبه غير المتوافق في الأنسجة معه بالأسفل. ويعني السهم أن «المانح عند ذيل السهم متوافق مع المتلقي عند رأس السهم». هذا الشكل هو نوع خاص من الرسم البياني؛ حيث تكون للحواف اتجاهات محددة. وعلى عكس جسور

كونيجسبرج، فإن هذه الحواف تكون في اتجاه واحد، لذا يطلق علماء الرياضيات عليها اسم الحواف الموجهة، والرسم البياني الناتج يكون رسمًا بيانيًّا موجهًا. عند الرسم، تمثَّل الحواف الموجهة بواسطة الأسهم.



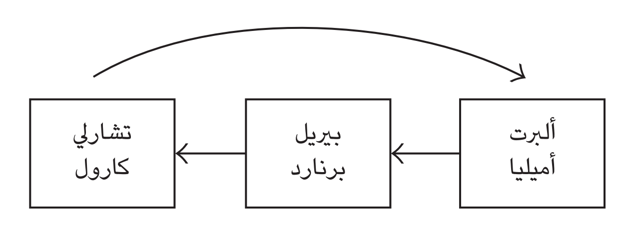
نوعان من التبادل.

إذا تصادف أن بيريل متوافقة في الأنسجة مع أميليا، تنص القواعد على أن نرسم سهمًا آخر في الاتجاه المعاكس. هذا يصنع صلة ثنائية الاتجاه، كما في الشكل الأيسر. يوضح هذا الشكل أبسط نوع من تبادل الكلى، الذي يطلِق عليه منظرو الرسم البياني «الدورة الثنائية». يمكن للجراحَين أن يقترحا تبرع ألبرت بكليته إلى برنارد، بشرط أن تتبرع بيريل بكليتها لأميليا. إذا وافق جميع الأطراف، فإن أميليا وبرنارد سيحصلان على كليتين جديدتين، بينما سيتبرع ألبرت وبيريل بكليتيهما. وعلى الرغم من أن قريبيهما لن يحصلا على كليتيهما، فإن كلًّا منهما سيحصل على الكلية التي يحتاجها. ومن ثَم سيستفيد كِلا المتلقيَين، ويتبرع كلا المانحين، لذلك فإن معظم المانحين المحتملين يكونون على استعداد لقبول هذا النوع من التبادل.

إن النوع التالي الأكثر تعقيدًا هو «الدورة الثلاثية». الآن هناك زوج ثالث، هما المانح تشارلي والمتلقية كارول. لنفترض ما يلي:

ألبرت متوافق في الأنسجة مع برنارد
بيريل متوافقة في الأنسجة مع كارول
تشارلي متوافق في الأنسجة مع أميليا

عندئذٍ يمكن للجراحين اتخاذ إجراءات لمنح كلية ألبرت إلى برنارد، وكلية بيريل إلى كارول، وكلية تشارلي إلى أميليا. مرة أخرى، سوف يقبل معظم المانحين هذا.

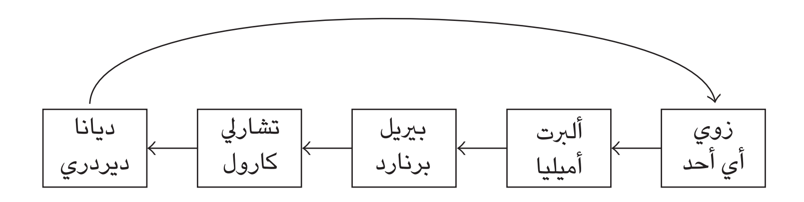


تبادل كُلى ثلاثي الدورة.

يجب التعامل مع المانحين الإيثاريين، مثل زوي، بشكل مختلف قليلًا؛ لأنهم لا يقترنون بأي شخص محدَّد. يجب الاستعانة بالقليل من الخداع الرياضي هنا. سنشكل العُقدة المقابلة من خلال قَرْن زوي مع متلقٍّ سنطلق عليه اسم «أي أحد»، ومن المفترض أن يُعتبر متوافقًا مع أي من المانحين غير الإيثاريين. في الواقع، يمثل هذا المتلقي التخيُّلي جميع الأشخاص في قائمة الانتظار. وسيصبح الافتراض هو أن كل واحد منهم متوافق مع أحد المانحين غير الإيثاريين، وهو أمر معقول؛ لأن قائمة الانتظار كبيرة. والآن نرسم سهمًا من

العقدة Z = (زوي، أي شخص)

إلى أي عقدة يكون المتلقي الخاص بها متوافقًا مع زوي. في سلسلة التبرع التبادلي الشبيهة بقِطَع الدومينو المتراصَّة، يبدو الرسم البياني الموجه مثل الشكل التالي.



هذه السلسلة غير عملية نظرًا لطولها الشديد.

مثل هذه السلاسل ليست عملية؛ فهي تتطلب عشرة جراحين للعمل في الوقت نفسه. فيجب أن تُجرى في الوقت نفسه، وإلا — على سبيل المثال — يمكن أن يغير تشارلي

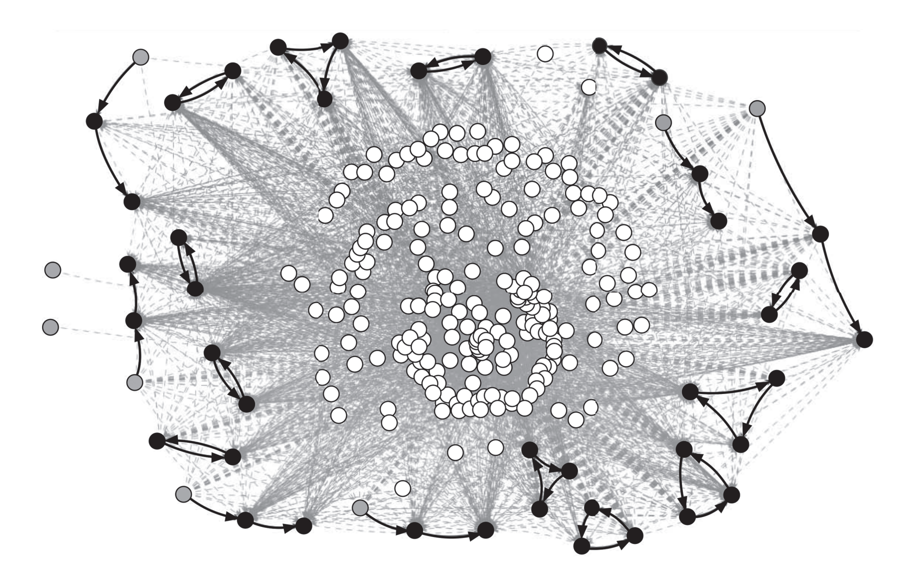
رأيه فجأة ويرفض التبرع لديردري، بمجرد أن تتلقى كارول كلية من بيريل. لا يلتزم الأشخاص دائمًا بالاتفاقات عندما يصبح من مصلحتهم ألَّا يفعلوا، حتى لو وقَّعوا على مستندات قانونية. إذا أرادوا ذلك، فسوف يجدون طريقة للتنصُّل من اتفاقاتهم. ادعاء المرض، أيًّا كان. أو كسر ساق.

لهذا السبب، تقتصر عمليات التبادل حاليًّا على أربعة سيناريوهات: الدورات الثنائية والدورات الثلاثية، وهما ما عرضناهما بالفعل، والدورات المقابلة عندما يشارك مانح إيثاري، التي تُسمَّى السلاسل القصيرة والسلاسل الطويلة. ستشمل السلسلة القصيرة فقط زوي وألبرت وأميليا وأحد الموجودين على قائمة الانتظار. وستشمل السلسلة الطويلة أيضًا بيريل وبرنارد. إن عملية التبادل يمكن أن تتمثَّل في أي من هذه السيناريوهات الأربعة.

لاحظ الخداع الطفيف. لقد عرضت هذه السلسلة كدورة بها خمس عُقد. عندما نفكر في الأمر على أنه عملية تبادل، فإن الأمر ليس كذلك حرفيًّا، لأن زوي ليس لديها متلقٍّ محدد في ذهنها. زوي مستعدة للتبرع لأي شخص، وفي نهاية السلسلة «تتبرع» ديانا لأي شخص (أي لقائمة الانتظار). لكن «أي أحد» الذي تتبرع له زوي في الواقع هو أميليا، وهذا ليس الشخص نفسه الذي تتبرع له ديانا في النهاية. يتعامل النموذج الرياضي مع هذا الأمر، لأننا نستنتج من هو «أي أحد» في كل حالة من بِنية الرسم البياني الموجَّه.

تُظهر الرسوم البيانية الموجهة أعلاه دورات وسلاسل فردية، تستخدم عددًا صغيرًا من العُقد والأسهم. في الواقع، هناك الكثير من الأزواج، وعدد أقل من المتبرعين الإيثاريين، وعدد هائل من الأسهم. يحدث هذا لأن الرسم البياني الموجه يجب أن يحتوي على سهم بين «أي» عقدتين X وY بحيث يكون المتبرع X متوافقًا مع المتلقي Y. يمكن أن يصبح المتبرع نفسه متوافقًا مع العديد من المتلقِّين. على سبيل المثال، في أكتوبر ٢٠١٧، جرى تسجيل ما مجموعه ٢٦٦ من الأزواج غير الإيثارية و٩ متبرعين إيثاريين، وكان هناك ٥٩٦٤ سهمًا. الشكل التالي يوضح تعقيدًا مشابهًا في وقت آخر. يتمثل التحدي الرياضي في إيجاد ليس فقط تبادل واحد في الرسم البياني الموجه، ولكن أفضل مجموعة ممكنة من التبادلات.

من أجل حل هذه المسألة رياضيًّا، نحتاج إلى توضيح مفهوم «أفضل مجموعة ممكنة من التبادلات». إذ لا يقتصر الأمر على مجموعة التبادلات التي تضم أكبر عدد من الأشخاص.

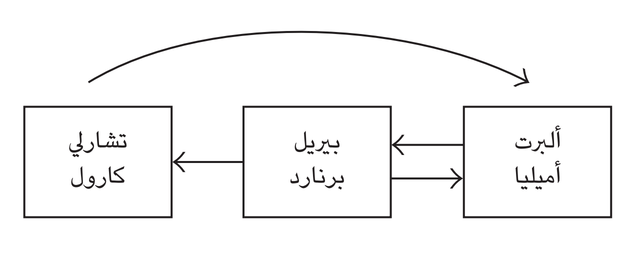


رسم بياني موجه لتبادل الكلى مستخدم في يوليو ٢٠١٥، والحل الأمثل «الخطوط السوداء المتصلة». تعني النقاط البيضاء المتبرعين والمتلقين غير المتوافقين، في حين تعني النقاط الرمادية المتبرعين الإيثاريين، والنقاط السوداء المتلقين والمتبرعين المتوافقين.

هناك اعتبارات أخرى، مثل التكلفة ومعدل النجاح المحتمل. هنا، يأتي دور المشورة والخبرة الطبية. لقد طوَّرت وحدة نقل الدم وزرع الأعضاء التابعة لهيئة الخدمات الصحية الوطنية البريطانية نظام تقييم قياسيًّا لتحديد الفائدة المحتملة لأي عملية زرع أعضاء معينة. يأخذ هذا في الاعتبار عوامل مثل طول فترة انتظار المريض، ومستويات عدم توافق نوع الأنسجة، وفرق السن بين المتبرع والمتلقي. وباستخدام التحليل الإحصائي، يُجمع بين هذه العوامل في تقييم عددي واحد، وهو عدد حقيقي يُسمى الوزن. ويُحسب هذا الوزن لكل سهم في الرسم البياني الموجه؛ أي، لكل عملية زرع محتملة.

هناك شرط واحد مباشر وواضح، وهو أنه لا يمكن أن تشتمل عمليتا تبادل مختلفتان في المجموعة على أي عُقَد مشتركة؛ لأنه لا يمكنك إعطاء الكلية نفسها لشخصين مختلفين. رياضيًّا، يعني هذا أن الدورات المكونة للمجموعة لا تتقاطع. الشروط الأخرى أكثر تعقيدًا. تتميز بعض الدورات الثلاثية بميزة إضافية مفيدة: سهم إضافي في الاتجاه العكسي بين العقدتين. ويُظهر الشكل التالي مثالًا، حيث، بالإضافة إلى الأسهم في الدورة الثلاثية

السابقة، هناك سهم آخر من زوج بيريل إلى زوج أميليا. وهذا يعني أن بيريل متوافقة مع أميليا وكذلك مع كارول. إذا انسحب تشارلي في مرحلة متأخرة من عملية التبادل، فيمكن عندئذٍ استبعاد كارول أيضًا؛ ومن ثَم تتبقى دورة ثنائية يتبرع فيها ألبرت لبرنارد وبيريل لأميليا، ولا يزال من الممكن أن تستمر عملية التبادل. رياضيًّا، يشكل هذا الثلاثي من العقد دورة ثلاثية، وتشكل عقدتان دورة ثنائية. يُسمى السهم الإضافي القوس الخلفي. إن أي دورة ثلاثية لها قوس خلفي، وأي دورة ثنائية تسمى دورة ثنائية «فعَّالة».



دورة ثنائية فعالة.

حددت المجموعة الاستشارية للكلى لوحدة نقل الدم وزرع الأعضاء التابعة لهيئة الخدمات الصحية الوطنية البريطانية مجموعة من عمليات تبادل الكلى، واعتبرتها مثالية إذا تحققت لها الشروط التالية:

(١) أن يتوافر فيها أقصى عدد من الدورات الثنائية الفعَّالة.
(٢) أن تحتوي على أكبر عدد ممكن من الدورات، مع مراعاة الشرط (١).
(٣) أن تستخدم أقل عدد ممكن من الدورات الثلاثية، مع مراعاة الشرطين (١) و(٢).
(٤) أن يتوافر فيها أقصى عدد من الأقواس الخلفية، مع مراعاة الشروط من (١) إلى (٣).
(٥) أن يتوافر فيها أقصى قيمة للوزن الإجمالي لدوراتها، مع مراعاة الشروط من (١) إلى (٤).

إن السبب البديهي لوضع هذا التعريف هو إعطاء الأولوية لميزات محددة؛ وبمجرد تحقيق ذلك، يجري تِباعًا تحديد ميزات أخرى ذات أولوية أقل. على سبيل المثال، يتأكد

الشرط (١) من أن تضمين التبادلات ثلاثية الاتجاهات لا يقلل من عدد التبادلات ثنائية الاتجاه التي كان من الممكن إجراؤها لولا ذلك. وهذا له مزايا، مثل: البساطة، وإمكانية المضي قُدمًا في الدورة الثنائية إذا انسحب شخصٌ ما. ويعني الشرط (٥) أنه بعد اتخاذ القرارات الرئيسية فيما يتعلق بالشروط من (١) إلى (٤)، وعندئذٍ فقط، ينبغي أن تصبح مجموعة التبادلات فعَّالة، ومن المرجح أن تنجح، قدر الإمكان.

تكمن المسألة الرياضية في إيجاد مجموعة مثالية من التبادلات، وفقًا لهذه الشروط. يُظهر القليل من التفكير وإجراء بعض العمليات الحسابية السريعة أنه ليس من الممكن التحقق من كل مجموعة ممكنة من التبادلات. هناك الكثير من الاحتمالات. لنفترض أن هناك ٢٥٠ عقدة و٥٠٠٠ حافة. في المتوسط، تلتقي كل عقدة بـ ٢٠ حافة، وإذا استخدمنا عددًا تقريبيًّا، يمكننا أن نفترض أنها تقع في مقدمة ١٠ ونهاية ١٠. لنفترض أننا نريد عرض كل الدورات الثنائية الممكنة. اختَر عقدة واتبع الأسهم العشرة المنبثقة منها. ينتهي كل سهم عند نقطة عقدة، يخرج من كل منها ١٠ أسهم. سنحصل على دورة ثنائية إذا كانت العقدة النهائية هي العقدة الأولى نفسها. إذن هناك ١٠٠ احتمال يجب التحقُّق منها. ويتطلب العثور على دورة ثلاثية ١٠٠ × ١٠ = ١٠٠٠ احتمال من هذا النوع؛ أي يصبح لدينا ١١٠٠ احتمال لكل عقدة. مع وجود ٢٥٠ عقدة، يصبح لدينا الآن ٢٧٥ ألف احتمال يجب التحقق منه، مع تجاهل الاختصارات التي يمكن أن تقلل الإجمالي إلى حد ما، ولكن لا تغير المقدار العام.

ومع ذلك، كل ما فعلناه الآن هو عرض الدورات الثنائية والثلاثية الممكنة. إن أي تبادل هو «مجموعة» منهما، وعدد المجموعات ينمو على نحو أُسِّي مع عدد الدورات. في أكتوبر ٢٠١٧، كان الرسم البياني الموجه مكونًا من ٣٨١ دورة ثنائية و٣٨١٥ دورة ثلاثية. وعدد مجموعات الدورات الثنائية فقط هو ٢٣٨١، وهو عدد يتكون من ١١٥ رقمًا. وعدد مجموعات الدورات الثلاثية مكون من ١١٤٩ رقمًا. ولم نتحقق بعدُ من المجموعات التي لا تحتوي على أي تقاطعات.

وغنيٌّ عن القول أن هذه ليست الطريقة التي نستخدمها لحل المسألة. لكنها توضح أنه يجب ابتكار بعض الأساليب القوية جدًّا لفعل ذلك. سأضع فقط بعض الخطوط العريضة للأفكار ذات الصلة. يمكننا التفكير في هذه المسألة باعتبارها نوعًا معقَّدًا من مسألة البائع المتجول: إنها مسألة تحسين توافُقي مع قيود مختلفة نوعًا ما، وبعض الاعتبارات متشابهة. أهم اعتبار هو الوقت الذي يستغرقه حساب الحل الأمثل. يمكننا اختبار هذه الاستراتيجية من وجهة نظر التعقيد الحسابي، كما في الفصل الثالث.

إذا كانت عمليات التبادل تتضمَّن دورات ثنائية فقط، فيمكن حساب المجموعة المثالية من التبادلات في زمن خطِّي، فئة التعقيد P، باستخدام الطرق القياسية لمطابقة الوزن الأقصى في الرسم البياني. إذا كانت هناك دورات ثلاثية، حتى دون متبرعين إيثاريين، تصبح مسألة التحسين من فئة NP الصعبة. ومع ذلك، ابتكر مانلاف وزملاؤه خوارزمية عملية تعتمد على البرمجة الخطية، التي عرضناها في الفصل الثالث. إن الخوارزمية الخاصة بهم، التي تُسمى «النظام البريطاني لمشاركة الكُلَى بين الأحياء (UKLKSS)، تعيد صياغة مسألة التحسين بحيث يمكن حلها باستخدام سلسلة من عمليات البرمجة الخطية الحسابية. يتم إدخال نتيجة كل منها في النتيجة التالية باعتبارها قيدًا إضافيًّا. ومن ثَم يجري تحسين الشرط الأول (١)؛ يستخدم هذا طريقةً تُسمى خوارزمية إدموندز، مثلما أجراها سيلفيو ميكالي وفيجاي فازيراني. تجد خوارزمية إدموندز أقصى مطابقة في الرسم البياني، في زمن يتناسب مع عدد الحواف مضروبًا في الجذر التربيعي لعدد العُقَد. تربط المطابقة بين أزواج الرءوس عند طرفي الحافة المشتركة، وتكمن المسألة في كيفية مطابقة أكبر عدد ممكن من أزواج العقد دون استخدام حافتين تلتقيان عند عقدة مشتركة.

بعد تحسينه من أجل تحقيق الشرط (١)، يجري إدخال هذا الحل في حساب الشرط (٢)، باستخدام خوارزمية تُسمى أداة حل مسائل برمجة الأعداد الصحيحة COIN-Cbc، وهي جزء من مجموعة الخوارزميات الخاصة بمشروع البنية التحتية الحسابية لبحوث العمليات، وهكذا.

بحلول نهاية عام ٢٠١٧، حددت هذه الأساليب الخاصة بنظرية الرسم البياني ما مجموعه ١٢٧٨ عملية زرع محتملة، ولكن أجريت ٧٦٠ فقط؛ لأن جميع أنواع المشكلات العملية يمكن أن تظهر في المراحل المتأخرة من التقييم، مثل اكتشاف أن أنواع الأنسجة ليست متوافقة كما كان يُعتقد، أو أن المتبرعين أو المتلقِّين مرضى لدرجة تمنعهم من الخضوع للعملية. ومع ذلك، فإن الاستخدام المنهجي لخوارزميات نظرية الرسم البياني لتنظيم عمليات زرع الكُلى بكفاءة يُعَد تحسنًا كبيرًا مقارنة بالطرق السابقة. كما يوجهنا أيضًا إلى السبيل الذي من خلاله يمكن إجراء تحسينات مستقبلية؛ لأنه من الممكن الآن حفظ الكلى خارج الجسم لفترات أطول دون أن تفقد صلاحيتها للزرع، لذلك لا يلزم إجراء جميع العمليات في أي سلسلة تبادل في اليوم نفسه. وهذا يجعل من الممكن التفكير في استحداث سلاسل أطول. وهذا سيؤدي إلى ظهور مسائل رياضية جديدة.

أنا لا أحاول منح أويلر الفضل من أجل استبصاره. فهو لم يكن لديه أدنى فكرة أن الحل البارع الذي قدمه من أجل لغز سخيف سيصبح يومًا مفيدًا في الطب. بالتأكيد ليس في مجال زرع الأعضاء، في وقت كانت العمليات الجراحية فيه عمليات وحشية شديدة الإيلام. لكنني أريد أن أنسب له الفضل في رؤيته، حتى في تلك المدة السابقة، أن هذا اللغز يشير إلى شيء أعمق بكثير. لقد قال ذلك صراحة. ارجع إلى الاقتباس الوارد في بداية هذا الفصل. حيث يذكر أويلر بشكل متكرر «هندسة الموضع» باعتبارها السياق ذا الصلة. كانت العبارة اللاتينية الفعلية التي استخدمها تعني «تحليل الموضع». وقد نسب إلى لايبنتس هذا المصطلح، وضمنيًّا، إدراك أن مثل هذا المجال قد يكون مهمًّا. من الواضح أنه كان مفتونًا بفكرة المجال الهندسي الذي لا يدور حول الأشكال الإقليدية التقليدية. إنه لا يرفضها لأنها غير تقليدية، بل العكس هو الصحيح تمامًا. إنه ليس متمسكًا بعنادٍ بالتقليد. ويسعده أن يضيف مساهمته الصغيرة في تطوير مثل هذا المجال. إنه مستمتع بذلك.

لقد تحقق حلم لايبنتس في القرن العشرين، مع بعض التطورات المهمة في القرن التاسع عشر. إننا نسميه الآن «الطوبولوجيا»، وسأعرض عليك بعض استخداماته الجديدة في الفصل الثالث عشر. لا تزال نظرية الرسم البياني مرتبطة بالطوبولوجيا، ولكنها تطورت بشكل أساسي عبر خطوط منفصلة. تعتبر المفاهيم مثل وزن حافةٍ ما عددية وليست طوبولوجية. لكن فكرة أنه يمكنك استخدام الرسوم البيانية لنمذجة أنظمة متفاعلة معقدة، ولحل مسائل التحسين، يُنسب الفضل فيها مباشرة إلى أويلر، وهو يحاول إيجاد حل لنوع جديد من المسائل «لأنها أسرت خياله»، ويبتكر طُرقًا خاصة به لفعل ذلك. لقد كانت تلك المسألة تعود لمدينة سان بطرسبرج، بروسيا، في عهد الإمبراطورة كاثرين الأولى، منذ ما يقرب من ثلاثة قرون. إن كل من يحصل على عملية زرع كلية، في المملكة المتحدة أو أي بلد آخر يستخدم تقنيات نظرية الرسم البياني لتخصيص الأعضاء على نحوٍ أكثر فعالية، يجب أن يسعد بأنه فعل ذلك.

الفصل الخامس

حلِّق آمنًا في الفضاء الإلكتروني

> لم يكتشف أحدٌ حتى الآن أي غرض حربي يمكن تحقيقه من خلال نظرية الأعداد أو النسبية، ويبدو من غير المحتمل أن يفعل أي شخص ذلك لسنوات عديدة.
>
> جودفري هارولد هاردي، كتاب «اعتذار عالم رياضيات»، ١٩٤٠

يشتهر بيير دي فيرما بأنه قدم «المبرهَنَة الأخيرة»، وهي تنص على أنه إذا كانت قيمة n على الأقل ثلاثة، فإن مجموع العددين الصحيحين اللذين كلٌّ منهما مرفوع للأُس n لا يمكن أن يصبح هو أيضًا عددًا مرفوعًا للأس n. ومؤخرًا توصل أندرو وايلز إلى إثبات حديث معقَّد في عام ١٩٩٥، أي، بعد نحو ٣٥٨ عامًا من إعلان فيرما عن تخمينه.[1] لقد كان فيرما محاميًا في برلمان تولوز، لكنه أمضى جل وقته في دراسة الرياضيات. كان لديه صديق يُدعى فرنيك دي بيسي، وهو عالم رياضيات باريسي اشتهر بفهرسة جميع المربعات السحرية البالغ عددها ٨٨٠ التي من الرتبة الرابعة. وقد تبادل الاثنان الرسائل على نحو متكرر، وفي ١٨ أكتوبر ١٦٤٠، كتب فيرما إلى دي بيسي، يخبره (بالفرنسية) أن «كل عدد أوَّلي ... عندما نطرح منه واحدًا ونضعه على هيئة أُس لأي عدد صحيح ونطرح منه واحدًا، فإن الناتج يقبل القسمة على هذا العدد الأوَّلي».

عند وضع ما سبق في صيغة جبرية، كان فيرما يقول إنه إذا كان p عددًا أوليًّا وكان a أي عدد، فإن $a^{p-1} - 1$ يقبل القسمة على p (دون باقٍ). إذن، على سبيل المثال، نظرًا لأن العدد ١٧ هو عدد أولي، فهو يؤكد أن جميع الأعداد التالية:

$$١^{١٦} - ١ \quad ٢^{١٦} - ١ \quad ٣^{١٦} - ١ \quad ... \quad ١٦^{١٦} - ١ \quad ١٨^{١٦} - ١ \quad ...$$

هي مضاعفات تامة للعدد ١٧. من الواضح أننا يجب أن نتغاضى عن $١٧^{١٦}$ – ١، الذي لا يمكن أن يكون مضاعفًا للعدد ١٧؛ لأنه أقل بمقدار ١ من مثل هذا المضاعف، أي $١٧^{١٦}$. وقد عرف فيرما أن هذا الشرط الإضافي مطلوب، لكنه لم يقل ذلك في الرسالة. دعونا نتحقق من حالة واحدة:

$$٦^{-١٦} - ١ = ١٨٤٤٦٧٤٤٠٧٣٧٠٩٥٥١٦١٥$$

وهذا العدد عند قسمته على ١٧ يساوي

$$١٠٨٥١٠٢٥٩٢٥٧١١٥٠٠٩٥$$

على نحوٍ تام. ما رأيكم في ذلك؟

يطلق على هذه الحقيقة الغريبة الآن «مبرهَنَة فيرما الصغرى»، لتمييزها عن مبرهنَتِه الأخيرة (أو الكبرى). كان فيرما من روَّاد نظرية الأعداد، التي تدرس الخصائص العميقة للأعداد الصحيحة. في زمنه، ولثلاثة قرون بعد ذلك، كانت نظرية الأعداد نظرية بحتة، وهي أكثر النظريات التي تتصف بهذا في الرياضيات البحتة. إذ لم يكن لها أي تطبيقات مهمة، ولم يكن يبدو أنها ستجد لها أي تطبيقات. كان جودفري هارولد هاردي، وهو أحد علماء الرياضيات البحتة الرائدين في بريطانيا، يرى هذا بالتأكيد، وقال ذلك في كتابه الصغير القَيِّم «اعتذار عالم رياضيات»، الذي نُشر في عام ١٩٤٠. كانت نظرية الأعداد أحد المجالات المفضلة لديه في الرياضيات، وقد نَشر بالاشتراك مع إدوارد ميتلاند رايت كتابًا كلاسيكيًّا اسمه «مقدمة لنظرية الأعداد» عام ١٩٣٨. وذكر فيه مبرهَنَة فيرما الصغرى، وكانت المبرهنة ٧١ في الفصل السادس. في الواقع، كان الفصل بأكمله عن نتائجها.

لقد تأثرت آراء هاردي السياسية والرياضية بالمواقف السائدة على أعلى مستويات المجتمع الأكاديمي، وتُصنَّف الآن على أنها متحيزة إلى حد ما، لكن كتاباته أنيقة، والرؤى التي يقدمها في المواقف الأكاديمية في ذلك الوقت ذات قيمة. إن بعضها حتى ذو صلة اليوم، لكن البعض الآخر تجاوزته الأحداث إلى حد كبير. وقد كتب هاردي يقول: «إنها لتجربة حزينة لعالم رياضيات متخصص أن يجد نفسه يكتب عن الرياضيات. تتمثل وظيفة عالم الرياضيات في فعل شيء ما، وإثبات مبرهَنَات جديدة، وإثراء علم الرياضيات، وليس التحدث عما فعله هو أو غيره من علماء الرياضيات.» هذا يقلل من أهمية التواصل وتوسيع نطاق معرفة الناس بالرياضيات، وهو أمر ذو قيمة عالية في العالم الأكاديمي اليوم، ولكن هذا السلوك المتغَطرِس نفسه كان لا يزال سائدًا هناك منذ أربعين عامًا.

كان أحد أسباب شعور هاردي بالحاجة إلى تبرير مهنته هو أنه، في رأيه، لم يكن لهذا النوع من الرياضيات التي كرَّس حياته لدراستها أي تطبيقات مفيدة، وكان من غير المرجَّح أن يظهر لها أي منها. لم تكن لها أي فائدة مجتمعية. كان اهتمامه بالمجال فكريًّا بحتًا: الرضا عن حل المسائل الصعبة، والنهوض بالمعرفة البشرية المجردة. لم يكن معنيًّا بشدة بشأن المنفعة، لكنه شعر بالذنب قليلًا حِيال ذلك. ما كان يهمه، بصفته من دعاة السلام طوال حياته، هو أنه لا ينبغي استخدام الرياضيات في الحرب. كانت الحرب العالمية الثانية مُستعِرة، وعلى مر العصور، كان لبعض مجالات الرياضيات استخدامات عسكرية خطيرة. يُقال إن أرشميدس استخدم معرفته بالقطع المكافئ لتركيز ضوء الشمس على سفن العدو، وإشعال النار فيها، وقانونَ الرافعة لتصميم مخلب ضخم يمكن أن يرفعها من الماء. ويرشدنا علم المقذوفات إلى كيفية توجيه أدوات المدفعية، من قذائف المدافع إلى القنابل المتفجرة. وتعتمد الصواريخ والطائرات دون طيار على مبادئ رياضية معقَّدة، مثل نظرية التحكم. لكن هاردي كان متأكدًا من أن نظرية الأعداد المحبوبة لديه لن تصبح لها استخدامات عسكرية — على الأقل، ليس لمدة طويلة جدًّا — وكان فخورًا بها.

كتب هاردي في زمن كان يقضي فيه الزميل في كامبريدج نحو أربع ساعات من اليوم في إجراء الأبحاث، وربما ساعة واحدة في التدريس، والباقي في حالة استرخاء لإعادة شحن البطارية الفكرية. كان يشاهد مباريات الكريكيت ويقرأ الجريدة. على الأرجح لم يخطُر بباله أن عالم الرياضيات الباحث البارز يمكنه أيضًا استخدام وقت الفراغ هذا لإعلام غير المتخصصين بما كان يفعله علماء الرياضيات. بهذه الطريقة، يمكنهم ابتكار أفكار رياضية جديدة والكتابة عنها. وهو ما يفعله الكثير منا في المجال اليوم.

إن وجهة النظر العامة لدى هاردي، التي ترى أن قدرًا كبيرًا من الرياضيات «البحتة» ليس له استخدام مباشر، وربما سيظل كذلك للأبد، غالبًا ما تكون صحيحة.[2] ولكن، وكما هو متوقع إلى حدٍّ ما، عندما اقترح أمثلة محددة للموضوعات عديمة الفائدة، اختار موضوعات خاطئة تمامًا. عندما قال إن نظريتَي الأعداد والنسبية من غير المرجَّح أن تخدما أي غرض حربي لسنوات عديدة، كان مخطئًا تمامًا، على الرغم من أننا يجب أن ننسب إليه الفضل في عدم استبعاد مثل هذه التطبيقات تمامًا. تكمن المشكلة الكبرى في أن تُقرر في وقت مبكر أي الأفكار ستكون لها تطبيقات وأيها لن تفعل. حُلَّ هذا التحدي، وحينها يمكنك تكوين ثروة. ولكن المجالات التي «لا يبدو» أن لها تطبيقات هي التي يمكن أن تدفع نفسها فجأة إلى الواجهة في الصناعة، والتجارة، وللأسف الحرب، وهذا ما

حدث مع نظرية الأعداد. على وجه التحديد، مع مبرهَنَة فيرما الصغرى، التي أصبحت الآن أساس ما نعتقد أنها شفرات غير قابلة للاختراق.

المفارقة هي أنه «قبل» عامين من تقديم هاردي اعتذاره، اشترى مدير المخابرات الحربية البريطانية قصر بلتشلي بارك، الذي سيصبح مقرًّا لمدرسة الأكواد والشفرات الحكومية، وهي المركز السري لفك شفرات الحلفاء خلال الحرب العالمية الثانية. وفيه تمكنت فرقٌ من محللي الشفرات من إنجاز العملية الشهيرة المتمثلة في حل شفرة آلة «إنيجما» التي استخدمها الألمان في الحرب، إلى جانب العديد من أنظمة تشفير المحور الأخرى. وقد بدأ آلان تورينج، أشهر أعضاء تلك المدرسة، التدريب في عام ١٩٣٨ ووصل إلى هناك في يوم إعلان الحرب. واستخدم محللو الشفرات في بلتشلي بارك البراعة والمبادئ الرياضية لفك الشفرات الألمانية، وظهرت أفكارٌ من نظرية الأعداد بين أساليبهم. وفي غضون أربعين عامًا، كانت ثورة في علم التشفير، تستند بقوة إلى نظرية الأعداد، في طريقها للانطلاق، مع وجود تطبيقات عسكرية ومدنية مهمة لها. وسرعان ما أصبح حيويًّا لتشغيل شبكة الإنترنت. ونحن نعتمد عليه اليوم، على نحو كبير دون أن ندرك أنه موجود.

وقد كانت لنظرية النسبية أيضًا استخدامات عسكرية ومدنية. إذ كان لها تأثير هامشي على مشروع مانهاتن لتطوير القُنبلة الذَّرِّية، تَجسَّد في الأسطورة الشائعة التي ترى أن معادلة أينشتاين الشهيرة ($E = mc^2$) أقنعت علماء الفيزياء بأن مقادير صغيرة من المادة تحتوي على كميات هائلة من الطاقة. كان هذا، على نحوٍ رئيسي، تبريرًا جرى استخدامه بعد الهجمات على هيروشيما وناجازاكي لمنح الناس طريقة سهلة لفهم كيف يمكن صناعة مثل هذه الأسلحة. ربما كان القصد منه، حتى، صرف انتباه الناس بعيدًا عن السر الحقيقي، وهو: فهم فيزياء التفاعلات النووية. وفي الآونة الأخيرة، وفي استخدامٍ أكثر ملاءمة، تعتمد دقة نظام تحديد المواقع العالمي للملاحة عبر الأقمار الصناعية (انظر الفصل الحادي عشر) على نظريتَي النسبية الخاصة والنسبية العامة لحساب المواقع بشكل صحيح، وقد جرى تمويل ذلك من قِبل الجيش الأمريكي، وخُصص في البداية لاستخداماته.

ومن ثَم، الجيش ٢، وهاردي صفر.

أنا لا ألوم هاردي. إذ لم تكن لديه أي فكرة عما كان يحدث في بلتشلي بارك، ولم يكن بإمكانه توقُّع التقدم السريع للاتصالات والحوسبة الرقمية. تعني كلمة «رقمية» في الأساس العمل مع الأعداد الصحيحة، وهذا ما تدور حوله نظرية الأعداد. فجأة، أصبح من الممكن الاستفادة من النتائج التي توصَّلت إليها أجيال من علماء الرياضيات البحتة بدافع

الفضول الفكري في إنتاج تكنولوجيات مبتكَرة. واليوم، قدر هائل من المفاهيم الرياضية — ليس فقط نظرية الأعداد، ولكن كل شيء من التوافيقات إلى الجبر المجرد والتحليل الوظيفي — يتجسَّد في الأجهزة الإلكترونية التي يحملها ربع عدد الجنس البشري يوميًّا. يجري ضمان سرية المعاملات عبر الإنترنت من قبل الأفراد والشركات وخدمات الأمن العسكري من خلال تحويلات رياضية ماكرة متجذِّرة في نظرية الأعداد المحبوبة لدى هاردي. لم يكن هذا ليفاجئ تورينج، الذي كان سابقًا لعصره لدرجة أنه كان يفكر بجدية في الذكاء الاصطناعي في عام ١٩٥٠. لكن تورينج كان حالمًا. في ذلك الوقت، لم يكن الأمر، حتى، خيالًا علميًّا. لكنه كان مجرد محض خيال.

إن الشفرة، أو الكود، هي طريقة لتحويل رسالة باللغة العادية، النص العادي، إلى نص مشفَّر يكون غير مفهوم. يعتمد التحويل بشكل عام على مفتاح، وهو معلومة مهمة تظل سِرية. على سبيل المثال، يُقال إن يوليوس قيصر استخدم شفرة يجري فيها نقل كل حرف من الحروف الأبجدية من موضعه في ترتيب الحروف إلى الأمام لثلاثة مواضع. المفتاح هنا هو «ثلاثة». هذا النوع من الشفرة التبديلية، حيث يتم تحويل كل حرف من الحروف الأبجدية إلى حرف آخر بطريقة ثابتة، يمكن فكه بسهولة، مع توفر قدرٍ كافٍ من النصوص المشفرة. تحتاج فقط إلى معرفة معدَّل تكرار أحرف الأبجدية في النص العادي. ثم يمكنك بدء محاولة تخمين الكود. في البداية ستكون هناك بعض الأخطاء، ولكن إذا بدا أن مقطعًا يعني JULIUS CAESAR أثناء حل الشفرة، فلست بحاجة إلى أن تكون عبقريًّا لتدرك أن حرف F يجب أن يستبدل به حرف I.

على الرغم من أن شفرة قيصر ربما تكون بسيطة وغير آمنة، فإنها مثال جيد لمبدأ عام، كان، حتى وقت قريب، أساسًا لجميع أنظمة الشفرات تقريبًا؛ إنها شفرة متناظرة، مما يعني أن كلًّا من المرسل والمتلقي يستخدمان المفتاح نفسه بشكل أساسي. أقول «بشكل أساسي» لأنهما يستخدمانه بطريقتين مختلفتين: يحرك يوليوس الحرف الأبجدي ثلاثة مواضع للأمام، بينما يحركه المتلقي ثلاثة مواضع للخلف. ومع ذلك، إذا كنت تعرف كيفية استخدام المفتاح لتشفير رسالة، فيمكنك بسهولة عكس العملية لاستخدام المفتاح نفسه لفك تشفيرها. حتى الشفرات المتطورة والآمنة للغاية متناظرة. لذلك يتطلب الأمن أن يظل «المفتاح» سريًّا، بالنسبة للجميع باستثناء المرسِل والمتلقي.

وكما قال بنجامين فرانكلين: «من الممكن لثلاثة أن يكتموا سرًّا، إذا كان اثنان منهم في عداد الموتى.» وفي أي شفرة متناظرة، يحتاج شخصان على الأقل إلى معرفة المفتاح،

وهو عدد كبير جدًّا من وجهة نظر فرانكلين. في وقت ما في عام ١٩٤٤ أو ١٩٤٥، اقترح شخص ما (ربما كلود شانون، مبتكر نظرية المعلومات) في مختَبَرات بل في الولايات المتحدة حماية الاتصالات الصوتية من المتلصِّصين عن طريق إضافة ضوضاء عشوائية إلى الإشارة، ثم إزالتها مرة أخرى عند استقبالها. وهذه أيضًا طريقة متناظرة، لأن المفتاح هو الضوضاء العشوائية، والإزالة تعكس الإضافة. وفي عام ١٩٧٠، تساءل جيمس إليس، وهو مهندس في مكتب الاتصالات الحكومية البريطانية، المعروف سابقًا باسم مدرسة الأكواد والشفرات الحكومية، عما إذا كان من الممكن توليد الضوضاء رياضيًّا. إذا كان الأمر كذلك، فمن المتصوَّر على الأقل أنه يمكن فعل هذا ليس عن طريق إضافة إشارات فحسب، ولكن من خلال بعض العمليات الحسابية التي سيصبح من الصعب جدًّا عكسها، حتى لو كنت تعرف ما هي. بالطبع، يجب أن يصبح المستلم قادرًا على عكسها، ولكن يمكن تحقيق ذلك باستخدام مفتاح «ثانٍ»، معروف للمتلقي فقط.

أطلق إليس على هذه الفكرة اسم «التشفير غير السري». وقد أصبح المصطلَح الذي يطلق عليها الآن هو «نظام تشفير المفتاح العام». يعني هذان المصطلحان أنه يمكن الكشف عن قاعدة تشفير رسالةٍ ما لعامة الناس، ولكن دون معرفة المفتاح الثاني، لن يتمكن أي شخص من معرفة كيفية عكس هذا الإجراء وفك تشفير الرسالة. كانت المشكلة الوحيدة هي أن إليس لم يتمكن من ابتكار طريقة تشفير مناسبة. لقد كانت تنقصه ما تُسمى الآن دالَّة الباب الأفقي؛ فهي من السهل حسابها، ولكن مِن الصعب عكسها، مثل السقوط عبر باب أفقي. ولكن، كما هو الحال دائمًا، كان لا بد من وجود مفتاح ثانٍ سري يسمح للمتلقي الشرعي بعكس العملية بالسهولة نفسها، مثل السلم الخفي الذي يمكنك استخدامه للخروج مرة أخرى.

وهنا يأتي دور كليفورد كوكس، وهو عالم رياضيات بريطاني أيضًا في مكتب الاتصالات الحكومية بالمملكة المتحدة. في سبتمبر من عام ١٩٧٣، راودت كوكس فكرة رائعة. استطاع تحقيق حلم إليس، مستخدمًا المبادئ الرياضية الخاصة بالأعداد الأوَّلية لإيجاد دالة الباب الأُفقي. رياضيًّا، من السهل ضرب عددين أوليَّين أو أكثر معًا. يمكنك القيام بذلك يدويًّا فيما يتعلق باثنين من الأعداد الأولية المكونة من ٥٠ رقمًا، مع الحصول على نتيجة مكونة من ٩٩ أو ١٠٠ رقم. لكن العملية العكسية، وهي إيجاد العوامل الأولية لعدد مكون من مائة رقم، أصعب بكثير. ومن المستحيل استخدام الطريقة المدرسية القياسية المتمثِّلة في «تجريب العوامل المحتملة واحدًا تلو الآخر»؛ إذ إن هناك كمًّا ضخمًا

من الاحتمالات. وقد ابتكر كوكس دالة باب أُفقي بِناءً على حاصل ضرب اثنين من الأعداد الأولية الكبيرة. إن الكود الناتج آمن جدًّا، لدرجة أن حاصل الضرب هذا، وليس العددان الأوليان أنفسهما، يمكن إعلام الآخرين به. ويتطلب فك التشفير معرفة العددين الأوليين على نحو منفصل، وهذا هو المفتاح الثاني السري. وما لم تكن تعرف هذين العددين الأوليين، فلن تتمكن من حل الشفرة؛ ومعرفة حاصل ضربهما وحده لا يساعد. على سبيل المثال، لنفترض أني قد وجدت اثنين من الأعداد الأولية حاصل ضربهما هو:

١١٩٢٣٤٤٢٧٧٧٢٥٧٢٥٤٩٣٦٩٢٨٤٢١٢٦٧٢٠٥٠٣١٣٠٥
٨٠٥٣٣٩٥٩٨٧٤٣٢٠٨٠٥٩٥٣٠٦٣٨٣٩٨٥٢٢٦٤٦
٨٤١ ٣٤٤٤٠٧٢٤٦٩٨٥٥٢٣٣٣٦٧٢٨٦٦٦٠٦٩.

هل يمكنك إيجاد هذين العددين الأوليين؟[3] يمكن لكمبيوتر فائق شديد السرعة فعل ذلك، لكن الكمبيوتر المحمول العادي سيواجه صعوبة في ذلك. ومع المزيد من الأرقام، حتى الكمبيوتر الفائق سيتعثر.

على أي حال، كانت خلفية كوكس هي نظرية الأعداد، وقد ابتكر طريقة لاستخدام مثل هذا الزوج من الأعداد الأولية لصياغة دالة باب أفقي؛ سأشرح ذلك بعد قليل، عندما تصبح لدينا المفاهيم الضرورية. كان الأمر بسيطًا لدرجة أنه «حتى لم يكتبه» في البداية. في وقت لاحق، سرد التفاصيل في تقرير لرؤسائه. لكن لا أحد أمكنه التفكير في طريقة لاستخدام هذا الأسلوب، في ظل أجهزة الكمبيوتر البدائية في ذلك الوقت، لذلك اعتُبر الأمر سريًّا. كما أنه أُرسِل إلى وكالة الأمن القومي الأمريكية. لقد أدركت كلتا الهيئتين وجود إمكانية لاستخدامه عسكريًّا؛ لأنه حتى لو كانت الحسابات بطيئة، فيمكنك استخدام نظام المفتاح العام كي ترسل لشخص ما المفتاح لكود آخر مختلف تمامًا إلكترونيًّا. هذه هي الطريقة الرئيسية التي يُستخدم بها هذا النوع من التشفير اليوم، في كل من التطبيقات العسكرية والمدنية.

إن البيروقراطيين البريطانيين لديهم سجل طويل وغير مميز من الفشل في التعرف على الفُرص الواعدة التي ستُدرُّ أموالًا ضخمة، مثل البنسلين، والمحرك النفاث، وتحديد البصمة الوراثية. في هذه الحالة، على الرغم من ذلك، يمكنهم الحصول على بعض العزاء من قانون براءات الاختراع؛ فمن أجل الحصول على براءة اختراع لشيء ما، عليك الكشف عن ماهيته. على أي حال، حُفظت فكرة كوكس الثورية في الملفات السرية، مثل المشهد الموجود في نهاية فيلم «سارقو التابوت الضائع» (رايدرز أوف ذا لوست آرك)؛ حيث

يوضع الصندوق الذي يحتوي على «تابوت العهد» في أعماق مخزن حكومي ضخم مجهول، مكدس حتى السقف بصناديق تشبهه.

في هذه الأثناء، خلال عام ١٩٧٧، ظهرت الطريقة المماثلة، وأعيد ابتكارها بشكل مستقل، ونَشَرها على الفور ثلاثة علماء رياضيات أمريكيين: رونالد ريفيست، وآدي شامير، وليونارد أدلمان. ويطلق عليها الآن نظام تشفير «آر إس إيه» نسبة للحرف الأول من اسم عائلة كل عالم منهم. وأخيرًا، في عام ١٩٩٧، رَفعت المخابرات البريطانية السرية عن أبحاث كوكس، وهكذا عرفنا الآن أنه أول من فكر في هذه الطريقة.

تدخل نظرية الأعداد علم التشفير بمجرد أن ندرك أنه يمكن تمثيل أي رسالة بعدد. بالنسبة لشفرة قيصر، ذلك العدد هو موضع ترتيب الحرف في الأبجدية، التي يفضل علماء الرياضيات ترتيبها من ٠ إلى ٢٥ بدلًا من ١ إلى ٢٦، لأسباب ذات صلة بالملاءمة الجبرية. ومن ثَم، A يساوي ٠، وB يساوي ١، وهكذا حتى Z يساوي ٢٥. يمكن تحويل أعداد خارج هذا النطاق إلى أعداد بداخله عن طريق جمع أو طرح مضاعفات ٢٦. هذه الطريقة تولِّد نمطًا دائريًّا؛ بحيث بعد Z نعود إلى A. يمكن عندئذٍ تبسيط شفرة قيصر في قاعدة رياضية أساسية، في الواقع هي صيغة:

$$n \longrightarrow n + 3$$

وتبدو العملية العكسية مشابهة للغاية:

$$n \longleftarrow n + 3$$

أو

$$n \longrightarrow n - 3$$

وهذا ما يجعل الشفرة مُتَناظرة.

يمكننا ابتكار شفرات جديدة عن طريق تغيير القواعد أو الصيغة. نحتاج فقط إلى طريقة بسيطة لتحويل رسالة إلى عدد، وصيغتين: واحدة لتحويل رسالة النص العادي إلى نص مشفر، والأخرى لاستعادتها مرة أخرى. كل صيغة يجب أن تعكس الأخرى.

هناك العديد من الطرق لتحويل النص العادي إلى أعداد. إحدى الطرق البسيطة تتمثَّل في تعيين عدد من ٠ إلى ٢٥ لكل حرف، وضم هذه الأعداد معًا، مع دمج أعداد

من ٠ إلى ٩ على هيئة من ٠٠ إلى ٠٩. وهكذا سيصبح التشفير العددي المقابل لكلمة JULIUS هو ٠٩٢٠١١٠٨٢٠١٨ (تذكَّر أن A يساوي ٠٠). ربما تكون هناك حاجة إلى أعداد إضافية لتمثيل المسافات الفاصلة وعلامات الترقيم، وغير ذلك. هذا وتسمى القاعدة التي تحوِّل عددًا إلى عدد آخر دالة خاصة بنظرية الأعداد.

إن تدوير الأعداد في نمط دائري هو حيلة قياسية خاصة بمنظِّري نظرية الأعداد، تُسمى الحساب المقياسي. اختر عددًا، لنقُل مثلًا ٢٦. الآن تخيل أن ٢٦ هو العدد ٠، لذا فإن الأعداد الوحيدة التي تحتاجها هي من ٠ إلى ٢٥. في عام ١٨٠١، أشار كارل فريدريش جاوس في كتابه الشهير «التحقيقات الحسابية» إلى أنه في مثل هذا النظام يمكنك جمع وطرح وضرب الأعداد، مع مراعاة جميع قوانين الجبر المعتادة، دون الانحراف عن النطاق المختار الذي يتراوح بين ٠ و٢٥. ما عليك سوى إجراء العملية الحسابية المعتادة باستخدام الأعداد العادية ثم أَخْذ الباقي من قسمة الناتج على ٢٦. لذلك، على سبيل المثال، ٢٣ × ١٧ = ٣٩١، وهذا الناتج عبارة عن ١٥ × ٢٦ + ١. إذن الباقي هو ١، لذا ٢٣ × ١٧ = ١ في هذه النسخة الحسابية غير العادية.

تعمل الفكرة نفسها مع استبدال أي عددٍ آخر بالعدد ٢٦؛ هذا العدد يُسمى «المقياس» (modulus)، ويمكننا كتابة (mod 26) لتوضيح هذا. لذلك، وبشكل أكثر دقة، لقد حسبنا أن ٢٣ × ١٧ = ١ (mod 26).

ماذا عن عملية القسمة؟ إذا قسمنا على ١٧، ولا تقلق كثيرًا بشأن ما يعنيه ذلك، فسنحصل على:

$$23 = 1/17 \pmod{26}$$

إذن فإن القسمة على ١٧ هي نفسها الضرب في ٢٣. يمكننا الآن ابتكار قاعدة شفرة جديدة:

$$n \longrightarrow 23n \pmod{26}$$

التي عكسها

$$n \longleftarrow 17n \pmod{26}$$

تُغير هذه القاعدة من ترتيب الحروف الأبجدية على نحو واضح، ليصبح بالترتيب التالي:

AXUROLIFCZWTQNKHEBYVSPMJGD

إنها لا تزال شفرة تبديلية على مستوى الأحرف الفردية، لذلك يمكن فكها بسهولة، لكنها توضح أنه يمكننا تغيير الصيغة. كما توضح كيفية استخدام الحساب المقياسي، وهو مفتاح مجالات واسعة من نظرية الأعداد.

ومع ذلك، يمكن أن تصبح عملية القسمة أكثر تعقيدًا. بما أن ٢ × ١٣ = ٢٦ = ٠ (mod 26)، لا يمكننا القسمة على١٣، وإلا فإننا نستنتج أن ٢ = ٠ / ١٣ = ٠ (mod 26)، وهذا خطأ. الأمر نفسه ينطبق على القسمة على ٢. إذن القاعدة العامة هي أنه يمكننا القسمة على أي عدد لا يشترك في أي عامل أولي مع المقياس. لذلك يُستبعد الصفر، ولكن هذا ليس مفاجئًا؛ لا يمكننا القسمة على ٠ في الأعداد الصحيحة العادية. إذا كان المقياس عددًا أوليًّا، فيمكننا القسمة على أي عدد أقل منه، باستثناء الصفر.

تتمثل ميزة الحساب المقياسي في أنه يعطي قائمة «كلمات» النص العادي تركيبًا جَبريًّا. هذا يفتح الباب أمام مجموعة واسعة من القواعد لتحويل النص العادي إلى نص مشفر، واستعادته مرة أخرى. إن ما فعله كوكس، ولاحقًا ريفيست، وشامير، وأدلمان، هو اختيار قاعدة بارعة جدًّا.

إن تشفير رسالة بتشفير حرف واحد في المرة، باستخدام نفس العدد لكل حرف، ليس آمنًا للغاية؛ فمهما كانت القاعدة، لدينا شفرة بديلة. ولكن إذا قسمنا الرسالة إلى أقسام، كل منها طوله عشرة أحرف مثلًا، أو نحو مائة كما في الوقت الحاضر، وحوَّلنا كل قسم إلى عدد، سنحصل على شفرة تبديلية قائمة على الأقسام. إذا كانت الأقسام طويلة بما يكفي، فلا يوجد نمط مميز لتكرار ورود أي قسم، لذا فإن فك التشفير عن طريق مراقبة الأعداد التي تتكرَّر على نحوٍ أكثر لن ينجح بعد الآن.

لقد اشتق كوكس، وريفيست وشامير وأدلمان، قواعدهم من المبرهَنَة الجميلة التي اكتشفها فيرما في عام ١٦٤٠، ليوضحوا لنا كيف تتصرَّف «أُسُس» الأعداد في الحساب المقياسي. وفي اللغة الرياضية الحديثة، أخبر فيرما صديقه دي بيسي أنه إذا كان n عددًا أوليًّا، فإن:

$$a^{n-1} = 1 \pmod n$$

أو

$$a^n = a \pmod n$$

لأي عدد a. وكتب فيرما يقول: «سأرسل لك إثباتًا لذلك، لكن أخشى أنه سيكون طويلًا للغاية.» وقدَّم أويلر الإثبات المفقود في عام ١٧٣٦، وفي عام ١٧٦٣ نشر مبرهَنَة أكثر عمومية تنطبق عندما لا يكون المقياس عددًا أوليًّا. الآن يجب ألا يشترك a وn في عامل مشترك، ويستبدل بالأُس $n-1$ في النسخة الثانية من الصيغة مؤشر أويلر $\varphi(n)$. لا نحتاج إلى معرفة ماهية هذه الدالة،[4] لكننا نحتاج إلى معرفة أنه إذا كان $n = pq$ هو حاصل ضرب العددين الأوليين p وq فإن $\varphi(n) = (p-1)(q-1)$.

ويعمل نظام تشفير آر إس إيه على النحو التالي:

- أوجِد العددين الأوليين الكبيرين p وq.
- احسِب حاصل ضربهما $n = pq$.
- احسِب $\varphi(n) = (p-1)(q-1)$. ولا تُعلِم به أحدًا.
- اختر العدد e الذي ليس له عامل أولي مشترك مع $\varphi(n)$.
- احسب d بحيث يصبح $d\mathrm{e} = 1(\mathrm{mod}\ \varphi(n))$.
- يمكن جعل العدد e معلومًا. (هذا يعطي القليل جدًّا من المعلومات المفيدة حول $\varphi(n)$، بالمناسبة.)
- حافظ على سرية قيمة d. (هذا أمر مهم للغاية.)
- لنفترض أن r رسالة نص عادي، مشفرة على هيئة عدد بمقياس n.
- حول r إلى النص المشفر $r^{\mathrm{e}}(\mathrm{mod}\ n)$. (يمكن أيضًا أن تكون هذه القاعدة معروفة للآخرين.)
- لفك شفرة r^{e}، ارفعه إلى الأس $d(\mathrm{mod}\ n)$. (تذكر أن d غير معلومة.) هذا يعطي الناتج $(r^{\mathrm{e}})^d$ ، الذي يساوي $r^{\mathrm{e}d}$ الذي يساوي r وفقًا لمبرهَنَة أويلر.

هنا قاعدةُ التشفير هي «ارفع للأُس e»:

$$r \longrightarrow r^{\mathrm{e}}$$

وقاعدة فك التشفير هي «ارفع للأُس d»:

$$s \longrightarrow s^{d}$$

بعض الحيل الرياضية، التي لن أتناولها، تجعل من الممكن تنفيذ كل هذه الخطوات بسرعة (على أجهزة الكمبيوتر الحالية)، بشرط أن تعرف p وq بشكل منفصل. تكمن

المشكلة في أنك إذا لم تكن تعرف هذه المعلومة، عندئذٍ فإن معرفة n وe لا تساعد كثيرًا في حساب d، التي تحتاجها لفك تشفير الرسالة. بشكل أساسي، تحتاج إلى إيجاد العاملين الأوليين p وq الخاصين بـ n، وقد رأينا أنه أمر (على ما يبدو) أصعب بكثير من ضرب p وq للحصول على n.

بعبارة أخرى، «ارفع إلى الأس e» هي دالة الباب الأُفقي المطلوبة.

حاليًّا، يمكن عمل كل شيء مما سبق في دقيقة، أو نحو ذلك، على جهاز كمبيوتر محمول، لعددين أوَّلِيَّين p وq مكوَّنين، لنقُل، من ١٠٠ رقم. إن إحدى الميزات الممتعة لنظام آر إس إيه أنه كلما أصبحت أجهزة الكمبيوتر أكثر قوة، فإن كل ما عليك فعله هو جعل p وq أكبر. وستظل هذه الطريقة تعمل بكل كفاءة.

لكن أحد العيوب هو أن هذا النظام، على الرغم من كونه عمليًّا تمامًا، بطيء جدًّا بحيث لا يمكن استخدامه بشكل روتيني للمحتوى الكامل لكل رسالة. يتمثل التطبيق العملي الرئيسي في استخدام النظام كطريقة آمنة لنقل مفتاح سري لنظام تشفير مختلف تمامًا، وهو يكون أسرع بكثير في التنفيذ وآمن طالما لا يعرف أحد المفتاح. لذا فإن نظام آر إس إيه يحل مشكلة توزيع المفاتيح، التي سببت مشكلاتٍ لعلم التشفير منذ أيامه الأولى. كان أحد أسباب فك شفرة آلة «إنيجما» هو أن بعض الإعدادات المحددة على الآلة تُوزَّع على المشغلين في بداية كل يوم بطريقة غير آمنة. وهناك تطبيق شائع آخر وهو التحقق من التوقيع الإلكتروني، أي رسالة مشفرة تحدد هوية المرسل.

كان رئيس كوكس رالف بنجامين، وهو كبير العلماء، وكبير المهندسين، والمدير المشرف في مكتب الاتصالات الحكومية البريطانية؛ على وعي بأهمية الأمر، ولاحظ هذه الإمكانية. وكتب في تقرير: «لقد قيَّمت هذا على أنه مهمٌّ للغاية للاستخدام العسكري. في المواقف العسكرية المتقلبة، قد تواجه تهديدات أو فرصًا غير متوقعة. فإذا كان بإمكانك مشاركة مفتاحك بسرعة وبشكل إلكتروني، فستصبح لديك ميزة كبيرة على خصمك.» لكن أجهزة الكمبيوتر لم تكن على مستوى المهمة في ذلك الوقت، وفقدت الحكومة البريطانية، نتيجةً للإدراك المتأخر، فرصة هائلة للاستفادة من الأمر.

نادرًا ما تحل الأساليب الرياضية المشكلات العملية بـ «طريقة مباشرة». فمثل أي شيء آخر، إنها تحتاج عمومًا إلى التعديل والمواءمة للتغلُّب على الصعوبات المختلفة. وهذا ينطبق على نظام آر إس إيه؛ فالأمر ليس بهذه البساطة التي وصفتُها في السطور السابقة. في

الواقع، ينبثق عدد من الأسئلة النظرية الرائعة أمام علماء الرياضيات بمجرد أن نتوقف عن الإعجاب بالفكرة ونفكر في المشكلات التي يمكن أن تحدث.

ليس من الصعب إثبات أن حساب $\varphi(n)$ ، دون معرفة عاملَيها الأوليين p وq، هو بنفس صعوبة إيجاد p وq أنفسهما. في الواقع، يبدو أن هذه هي الطريقة الوحيدة للقيام بذلك. لذا فإن السؤال المهم هو: ما مدى صعوبة التحليل إلى العوامل الأولية؟ يعتقد معظم علماء الرياضيات أنه أمر صعب للغاية، من الناحية الفنية: أي خوارزمية تحليل من هذا النوع لها وقت تشغيل يزداد على نحوٍ هائل مع زيادة عدد الأرقام في ناتج qp. (بالمناسبة، إن السبب في استخدام عددين اثنين فقط من الأعداد الأولية، بدلًا من ثلاثة، على سبيل المثال، هو أن هذه هي الحالة الأكثر صعوبة. فكلما زاد عدد العوامل الأولية لعددٍ ما، كان من الأسهل العثور على أحدها. اقسم العدد على هذا العامل، فسيصبح العدد الآن أصغر كثيرًا، لذا من الأسهل العثور على العوامل الباقية أيضًا.) ومع ذلك، لا أحد يستطيع حاليًّا «إثبات» أن التحليل إلى العوامل الأولية أمر صعب. لا أحد لديه أدنى فكرة عن كيفية البدء في مثل هذا الإثبات. لذا فإن أمان أسلوب آر إس إيه يعتمد على تخمين غير مُثبَت.

تتضمن الأسئلة والمشكلات الخفية الأخرى تفاصيل دقيقة خاصة بالأسلوب. إن الاختيارات السيئة للأعداد المستخدَمة يمكن أن تجعل نظام آر إس إيه عرضةً للهجمات البارعة. على سبيل المثال، إذا كان e صغيرًا جدًّا، فيمكننا تحديد الرسالة r عن طريق حساب الجذر ذي الترتيب e للنص المشفر r^{e}، الذي يعتبر عددًا عاديًّا؛ أي، دون استخدام $\bmod n$. وينشأ عيب آخر محتمل إذا أُرسلت الرسالة نفسها إلى عدد e من المتلقِّين باستخدام الأُس نفسه e، حتى لو كان p وq مختلفين في كل منهم. يمكن بعد ذلك استخدام نتيجة جميلة تُسمى «مبرهَنَة الباقي الصيني»، مما يكشف عن رسالة النص العادي.

إن نظام آر إس إيه، كما هو موضح، غير آمن أيضًا من الناحية الدلالية، مما يعني أنه من حيث المبدأ قد ينهار عند تشفير الكثير من رسائل النص العادي المختلفة ومحاولة مطابقة النتيجة مع النص المشفر الذي تريد اختراقه. بشكل أساسي، عن طريق التجربة والخطأ. قد لا يكون هذا عمليًّا للرسائل الطويلة، ولكن إذا أُرسِل الكثير من الرسائل القصيرة، فقد يصبح الأمر كذلك. لتجنُّب هذا، يُعدَّل هذا النظام عن طريق حشو الرسالة بأرقام إضافية، وفقًا لمخططٍ محدد، ولكن عشوائي. وهذا يجعل النص العادي أطول ويتجنب إرسال الرسالة نفسها عدة مرات.

طريقة أخرى لاختراق الكود المشفر بنظام آر إس إيه لا تستغل عيبًا رياضيًّا، بل ميزة مادية للكمبيوتر. في عام ١٩٩٥، لاحظ رائد الأعمال في مجال التشفير بول كوشر أنه إذا كان مختَرِق الشفرات يعرف ما يكفي عن المكونات المادية المستخدمة، ويمكنه قياس المدة التي تستغرقها لفك تشفير عدة رسائل، فيمكن عندئذٍ استنتاج المفتاح السري d بسهولة. وقد عرض دان بونيه وديفيد بروملي نسخة عملية من هذا الهجوم في عام ٢٠٠٣ للرسائل المرسلة عبر شبكة تقليدية باستخدام البروتوكول القياسي إس إس إل.

إن وجود أساليب رياضية يمكنها «أحيانًا» تحليل عدد كبير بسرعة كبيرة يقترح ضمنيًّا أنه يجب اختيار العددين الأوليين p وq بحيث يلبيان بعض الشروط التقييدية. ينبغي ألا يكونا قريبين جدًّا من بعضهما، وإلا فسيُطبَّق أسلوب التحليل الذي يعود مباشرة إلى فيرما. في عام ٢٠١٢، جربت مجموعة بقيادة آريين لينسترا هذا فيما يتعلق بملايين المفاتيح العامة المستخرجة من الإنترنت، وتمكنت من اختراق واحد من بين كل خَمسمائة منها.

إن ما سيُغير قواعد اللعبة على نحو كبير هو الكمبيوتر الكمي العملي. تستخدم هذه الآلات، التي لا تزال في مهدها، البتات الكمية بدلًا من الأرقام الثنائية المعتادة ٠ و١، ومن حيث المبدأ يمكنها إجراء عمليات حسابية ضخمة، مثل تحليل الأعداد الضخمة، بسرعة غير مسبوقة. سوف أؤجل المناقشة المفصلة لهذا إلى وقت لاحق في هذا الفصل.

إن نظام آر إس إيه هو واحد فقط من طُرق التشفير التي تستند إلى نظرية الأعداد، أو قريبتها الوثيقة الصلة بها: التوافيقات، وهي طريقة لحساب عدد الطرق التي يمكن بها تحقيق ترتيبٍ ما دون سرد جميع الاحتمالات. ومن أجل إقناعك بأن النبع الرياضي لم يجِفَّ بعدُ فيما يتعلق بعلم التشفير، سأعرض نظام تشفيرٍ بديلًا يستغل أحد أعمق المجالات وأكثرها إثارة في نظرية الأعداد الحالية. يتعلق هذا المجال بـ «المنحنيات الإهليلجية»، التي تُعَد من بين أمور أخرى أساسية من أجل إثبات أندرو وايلز الملحمي لمبرهَنَة فيرما الأخيرة.

لقد تطوَّرت نظرية الأعداد منذ زمن فيرما وأويلر. وكذلك تطوُّر الجبر؛ حيث تحول التركيز من التمثيل الرمزي للأعداد المجهولة إلى الخصائص العامة للأنظمة الرمزية المعرَّفة بقواعد محددة. يتداخل هذان المجالان البحثيان بشكل كبير. وقد ظهرت بعض الأفكار الرائعة عن الشفرات السرية من مزيج من فرعين متخصصين من الجبر ونظرية الأعداد، وهما: الحقول المنتهية والمنحنيات الإهليلجية. ولفهم ما ينطوي عليه الأمر، نحتاج أولًا إلى معرفة ماهية هذين الأمرين.

لقد رأينا أنه في عمليات الحساب المقياسي، من الممكن جمع «أعداد» وطرحها وضربها مع الالتزام بالقواعد الجبرية المعتادة. ولتجنُّب التشتيت، لم أقل في الواقع ما هي هذه القواعد، ولكن المثالين النموذجيين هما: قانون الإبدال $ab = ba$، وقانون التجميع $(ab)c = a(bc)$. هذان ينطبقان على عملية الضرب، وهناك قانونان مشابهان لعملية الجمع. قانون التوزيع $a(b + c) = ab + ac$ ينطبق أيضًا، وهناك قواعد بسيطة تتضمن ٠ و١، مثل $0 + a = a$ و$1a = a$. أي نظام يمتثل لهذه القوانين يُسمَّى «حلقة». إذا كانت القسمة ممكنة أيضًا (باستثناء القسمة على ٠) وتنطبق القواعد القياسية، نحصل على «حقل». هذان الاسمان تقليديان، ومنقولان من الألمانية، ويعنيان أساسًا «تجمُّع ما من الأشياء يخضع للقواعد المحددة». تشكل الأعداد الصحيحة بمقياس ٢٦ حلقة تُعرف باسم $\mathbb{Z}_{26}$. لقد رأينا أن هناك مشاكل عند القسمة على ٢ أو ١٣، لذا فهي ليست حقلًا. لقد أوضحت (دون الإشارة إلى السبب) أن الأعداد الصحيحة التي بمقياس عدد أوَّلي ليست لديها مثل هذه المشاكل، لذلك فإن $\mathbb{Z}_2$، $\mathbb{Z}_3$، $\mathbb{Z}_5$، $\mathbb{Z}_7$، وهكذا — الأعداد الصحيحة بمقياس ٢، و٣، و٥، و٧ — كلها حقول.

إن الأعداد الصحيحة العادية تستمر إلى ما لا نهاية؛ فهي تشكل مجموعة غير منتهية. على النقيض، نظم مثل $\mathbb{Z}_{26}$ و$\mathbb{Z}_7$ منتهية. يتألَّف الأول فقط من الأعداد من ٠ إلى ٢٥، والثاني من ٠ إلى ٦. الأول عبارة عن حلقة منتهية، والثاني عبارة عن حقل منتهٍ. إنه لأمر رائع حقًّا أن النظم المنتهية يمكنها أن تمتثل للكثير من قواعد الجبر دون حدوث أي تناقضات منطقية. إن نظم الأعداد المنتهية، إذا لم تكن كبيرة للغاية، مناسبة جدًّا للعمليات الحسابية الخاصة بالكمبيوتر؛ لأنها يمكن أن تُنجَز «على نحو دقيق». لذلك ليس من المستغرب أن تستند مجموعة متنوعة من الشفرات إلى حقول منتهية. ليس فقط شفرات التشفير، لضمان السرية، ولكن شفرات اكتشاف الأخطاء وتصحيح الأخطاء، لضمان تلقي الرسائل دون أخطاء ناشئة عن «تشويش» عشوائي، مثل التداخُل الكهربائي. ويعالج مثل هذه المشكلات فرع جديد تمامًا من الرياضيات، وهو نظرية الترميز.

إن أبسط الحقول المنتهية هو $\mathbb{Z}_p$، والذي يمثل الأعداد الصحيحة بمقياس العدد الأوَّلي p. لقد علم فيرما أنها تشكل حقلًا (وإن لم يكن بهذا الاسم). أثبت العالم الرياضي الثوري الفرنسي إيفاريست جالوا، الذي قُتل في مبارزة مأساوية وهو في سن العشرين، أن هذه ليست الحقول المنتهية الوحيدة. لقد وجدها جميعًا: هناك حقل منتهٍ لكل أُس لعدد أوَّلي p^n، وهو يحتوي بالضبط على p^n من «الأعداد» المختلفة. (تحذير: إذا كان n أكبر

من ١، فهذا الحقل لا يمثل الأعداد الصحيحة بمقياس p^n.) لذلك هناك حقول منتهية بها ٢، ٣، ٤، ٥، ٧، ٨، ٩، ١١، ١٣، ١٦، ١٧، ١٩، ٢٣، ٢٥ … من العناصر، ولكن ليس ١، ٦، ١٠، ١٢، ١٤، ١٥، ١٨، ٢٠، ٢١، ٢٢، ٢٤ … من العناصر، مما يجعلها مبرهَنَة غريبة للغاية.

لقد نشأت المنحنيات الإهليلجية (التي ترتبط فقط بشكل غير مباشر للغاية بالأشكال الإهليلجية) في مجال مختلف، وهو النظرية الكلاسيكية للأعداد. حوالي عام ٢٥٠ ميلاديًّا، كتب عالم الرياضيات الإغريقي ديوفانتس الإسكندري نصًّا عن حل المعادلات الجبرية باستخدام الأعداد الصحيحة (أو النسبية). على سبيل المثال، المثلث الشهير ٣–٤–٥ له زاوية قائمة، بفضل فيثاغورس، لأن ٣^٢ + ٤^٢ = ٥^٢. لذلك تقدم هذه الأعداد حلًّا لمعادلة فيثاغورس $x^2 + y^2 = z^2$. وتوضح إحدى مبرهنات ديوفانتس كيفية إيجاد جميع حلول هذه المعادلة في الكسور، وعلى وجه الخصوص في الأعداد الصحيحة. هذا المجال العام، حل المعادلات في الأعداد النسبية، أصبح يُعرف باسم «المعادلات الديوفانتية». إن التقيُّد باستخدام الأعداد النسبية يغيِّر قواعد اللعبة؛ على سبيل المثال، $x^2 = 2$ يمكن حلها بأعداد حقيقية، ولكن ليس بأعداد نسبية.

إحدى المسائل التي قدمها ديوفانتس هي: «قسِّم عددًا محددًا إلى عددين حاصل ضربهما عددًا مكعبًا مطروحًا منه جذره». إذا كان العدد الأصلي هو a، فإننا نقسمه إلى Y و$a - Y$، ونريد حل المسألة التالية:

$$Y(a - Y) = X^3 - X$$

وقد فحص ديوفانتس المسألة عندما تكون $a = 6$. وبإجراء تغيير مناسب للمتغيِّرات (طرح ٩، وتغيير Y إلى $Y + 3$ وX إلى $-X$) تتحول هذه المعادلة إلى ما يلي:

$$y^2 = x^3 - x + 9$$

ثم اشتق ديوفانتس الحل وهو: $X = 17/9$، و$Y = 26/27$.

على نحو لافت للنظر، ظهرت معادلات مماثلة في الهندسة، عندما حاول علماء الرياضيات استخدام التحليل (حساب التفاضل والتكامل المتقدم) لحساب طول القوس لقطاع من شكل إهليلجي. في الواقع، هكذا نشأ اسم «المنحنى الإهليلجي». لقد عرفوا كيفية الإجابة على السؤال المماثل بالنسبة للدائرة باستخدام حساب التفاضل والتكامل.

وعندئذٍ اختزلت المسألة إلى إيجاد تكامل دالة تتضمَّن الجذر التربيعي لكثيرة حدود تربيعية، ويمكن فعل ذلك باستخدام الدوال المثلثية (العكسية). نفس الطريقة المطبَّقة على الشكل الإهليلجي تؤدي إلى تكامل دالة تتضمن الجذر التربيعي لكثيرة حدود تكعيبية، وبعد بعض التجارب غير المثمِرة، أصبح من الواضح أن هناك حاجة إلى فئة جديدة من الدوال. واتضح أن هذه الدوال جيدة إلى حد كبير، على الرغم من تعقيدها، وسُمِّيت الدوال الإهليلجية نظرًا لارتباطها بطول قوس الشكل الإهليلجي. والجذر التربيعي لكثيرة حدود تكعيبية هو حل y للمعادلة:

$$y^2 = x^3 + ax + b$$

(أي حد x^2 على اليمين يمكن تحويله إلى صفر). تحدد هذه المعادلة في هندسة الإحداثيات منحنًى في المستوى، لذلك أصبحت هذه المنحنيات (ونسختها الجبرية كمعادلة) تُعرف باسم «المنحنيات الإهليلجية».

عندما تكون المعاملات أعدادًا صحيحة، يمكننا اعتبار المعادلة في الحساب المقياسي، لنقُل، في $\mathbb{Z}_7$. كل حل في الأعداد الصحيحة العادية يؤدي إلى حل في الأعداد الصحيحة بمقياس ٧. ونظرًا لأن هذا النظام منتهٍ، يمكننا استخدام أسلوب التجربة والخطأ. بالنسبة إلى معادلة ديوفانتس $y^2 = x^3 - x + 9 \pmod 7$، نكتشف بسرعة أن الحلول الوحيدة هي:

$$x = 2,\ y = 2 \quad x = 2,\ y = 5$$

$$x = 3,\ y = 1 \quad x = 3,\ y = 6$$

$$x = 4,\ y = 3 \quad x = 4,\ y = 4$$

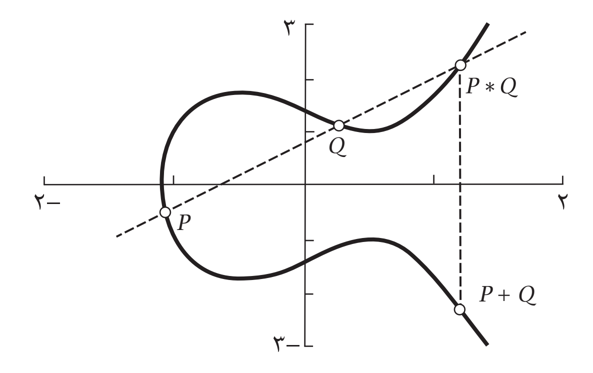
هذه الحلول لها تأثيرات على أي حل في الأعداد الصحيحة العادية؛ فهو يجب تحويله إلى واحد من هذه الستة عندما يكون بمقياس ٧. الأمر نفسه ينطبق على الحلول النسبية، بشرط ألا يكون المقام من مضاعفات ٧، فهذه ممنوعة؛ لأنه في $\mathbb{Z}_7$ يصبح هذا المقام صفرًا. غيِّر ٧ إلى عدد آخر وسنحصل على مزيد من المعلومات حول شكل أي حل نسبي افتراضي.

الآن سننظر إلى المنحنيات — المعادلات — الإهليلجية مع الحلقات والحقول المنتهية. إن الصورة الهندسية لمنحنًى ما غير قابلة للتطبيق في الواقع، نظرًا لأن لدينا فقط مجموعة

منتهية من النقاط، ولكن من الملائم استخدام الاسم نفسه. ويوضح الشكل التالي رسمًا نموذجيًّا، وميزة إضافية، معروفة لدى فيرما وأويلر، أثارت اهتمام علماء الرياضيات في أوائل القرن العشرين. عند وجود حلَّين، يمكننا «جمعهما» للحصول على حل آخر، كما هو موضح في الشكل. إذا كان الحلان عددين نسبيَّين، فسيصبح مجموعهما كذلك عددًا نسبيًّا. ليس فقط على طريقة «اشترِ اثنين، واحصل على واحدٍ مجانًا»، ولكن «اشترِ اثنين، واحصل على الكثير مجانًا»؛ لأنه يمكنك تكرار التركيب. في بعض الأحيان، يقودك هذا إلى حيث بدأت، ولكنه في الغالب يُولِّد العديد من الحلول المختلفة على نحو غير منتهٍ. في الواقع، إن الحلول لها بنية جبرية لطيفة؛ فهي تشكل مجموعة تُسمى مجموعة موردل–فاي للمنحنى الإهليلجي. لقد أثبت لويس موردل خصائصها الأساسية وعمَّمها أندريه فاي، وتعني كلمة «مجموعة» أن الجمع يخضع لقائمة قصيرة من القواعد البسيطة. هذه المجموعة إبدالية، مما يعني أن $P + Q = Q + P$، وهو أمر واضح في الشكل السابق، لأن الخط المار بـ P وQ هو أيضًا الخط المار بـ Q وP. وجود مثل بنية المجموعة هذه هو أمر غير معتاد؛ فمعظم المعادلات الديوفانتية ليست لها هذه البنية. إن العديد منها ليس له حلول على الإطلاق، والبعض الآخر لديه عدد قليل فقط، ومن الصعب التنبؤ بالنوع الذي تعمل عليه. في الواقع، تعتبر المنحنيات الإهليلجية محل بحث مكثَّف، لهذا السبب ولأسباب أخرى. وقد أثبت أندرو وايلز تخمينًا مهمًّا حول تلك المنحنيات كخطوة رئيسية في إثباته لمبرهنة فيرما الأخيرة.

إن بنية المجموعة الخاصة بالمنحنى الإهليلجي تثير اهتمام علماء التشفير أيضًا. إذ يُنظر إليها عادةً على أنها شكل من أشكال «جمع» الحلول، على الرغم من أن الصيغة أكثر تعقيدًا بكثير؛ لأنها إبدالية، وأصبح الرمز + تقليديًّا في نظرية المجموعات الإبدالية. على وجه الخصوص، إذا كان لدينا الحل (x, y)، الذي يُمكِننا التفكير فيه كنقطة P في مستوًى ما، فيمكننا حينئذٍ توليد حلول مثل $P + P$ و$P + P + P$، وغير ذلك. من الطبيعي أن نُسمي هذه الحلول $2P$ و$3P$ وما إلى ذلك.

في عام ١٩٨٥، أدرك كلٌّ من نيل كوبليتس وفيكتور ميلر على نحو منفصل أنه يمكنك استخدام قانون المجموعة على منحنًى إهليلجي لإنشاء شفرة. والفكرة هي العمل في حقل منتهٍ ما، مع عدد كبير من العناصر. ومن أجل تشفير P، نوجد قيمة KP لعدد صحيح كبير للغاية يُرمز له بالرمز K، وهو أمر سهل باستخدام الكمبيوتر، ونسمي



من أجل «جمع» نقطتين P وQ على منحنًى إهليلجي، صل بينهما بخط يلتقي بالمنحنى عند نقطة ثالثة $P * Q$. ثم انعكس على المحور السيني للحصول على $P + Q$.

الناتج Q. ومن أجل عكس هذه العملية، يجب أن نبدأ بـ Q ثم نجد P؛ عمليًّا، بالقسمة على K. وبسبب تعقيد صيغة المجموعة، فإن هذا الحساب المعكوس صعب للغاية؛ لذلك ابتكرنا نوعًا جديدًا من دوال الباب الأفقي، ومن ثَم نظام تشفير المفتاح العام. إنه يُعرف باسم «تشفير المنحنى الإهليلجي». ومثلما يمكن تطبيق نظام تشفير آر إس إيه باستخدام العديد من الأعداد الأولية المختلفة، يمكن تطبيق تشفير المنحنى الإهليلجي باستخدام العديد من المنحنيات الإهليلجية المختلفة، على العديد من الحقول المنتهية المختلفة، مع خيارات مختلفة من P والمضاعف K. مرة أخرى، هناك مفتاح سري يسمح بفك التشفير على نحو سريع.

تبيَّن أن الميزة هي أن مجموعة أصغر تؤدي إلى تشفيرٍ آمن تمامًا مثل شفرة آر إس إيه قائمة على أعداد أولية عددها أكبر بكثير. لذا فإن شفرة قائمة على منحنًى إهليلجي تكون أكثر كفاءة. فسيكون تشفير رسالة، وفك تشفيرها بشرط أن تعرف المفتاح السري، أمرًا أكثر سرعة وبساطة. أما اختراق الشفرة إذا كنت لا تعرف المفتاح هو أمر شديد الصعوبة. في عام ٢٠٠٥، أوصت وكالة الأمن القومي الأمريكية بأن تنتقل الأبحاث في علم التشفير القائم على المفتاح العام إلى المجال الجديد الخاص بالمنحنيات الإهليلجية.

وكما هو الحال بالنسبة إلى نظام تشفير آر إس إيه، لا يوجد دليل قوي على أن نظام التشفير القائم على المنحنى الإهليلجي آمن. إذ إن نطاق الهجمات المحتملة مشابه لذلك الخاص بنظام آر إس إيه.

هناك الكثير من الاهتمام في الوقت الحالي بالعُملات المشفرة، وهي أنظمة نقدية لا تخضع لسيطرة البنوك التقليدية، على الرغم من أن اهتمام البنوك بها أصبح متزايدًا أيضًا. فالبنوك منتبهة دائمًا لأي طريقة جديدة لكسب المال. إن العُملة المشفَّرة الأكثر شهرة هي البيتكوين. ويجري التأكد من أمان عملات البيتكوين من خلال تقنية تُسمَّى سلسلة الكُتَل (البلوك تشين)، وهي عبارة عن سجل مشفَّر لجميع المعاملات ذات الصلة بتلك «العملة» على وجه التحديد. تُنشَأ عملات البيتكوين الجديدة عن طريق «التَّعدين»، وهو ما يعني بشكل أساسي إجراء عدد كبير من العمليات الحسابية التي لا طائل من ورائها في غير ذلك. يستهلك تعدين البيتكوين كميات هائلة من الكهرباء دون أي غرض مفيد، باستثناء إثراء عدد قليل من الأفراد. في أيسلندا، حيث الكهرباء رخيصة جدًّا بفضل التوليد الحراري من البخار تحت الأرضي، يستخدم تعدين البيتكوين كهرباء أكثر من جميع المنازل مجتمعة. من الصعب أن ترى كيف يساعد هذا النشاط في مكافحة الاحتباس الحراري وأزمة المناخ، ولكن هذا هو الحال.

تستخدم عملة البيتكوين والعديد من العملات المشفرة الأخرى منحنًى إهليلجيًّا محددًا، يُعرف بالاسم الجذاب secp256k1. ومعادلته، $y^2 = x^3 + 7$، أكثر جاذبية بكثير، ويبدو أن هذا هو السبب الرئيسي لاختيارها. ويعتمد التشفير باستخدام هذا المنحنى على نقطة على المنحنى يحددها ما يلي:

$$x = 55066263022277343669578718895168534326250$$

$$603453777594175500187360389116729240$$

$$y = 32670510020758816978083085130507043184471273$$

$$380659243924327593890433575733748242$$

يوضح هذا الأعدادَ الصحيحة العملاقة المتضمنة في التطبيقات العملية لنظام التشفير القائم على المنحنى الإهليلجي.

لقد قلت عدة مرات إن أمن نظام تشفير آر إس إيه يعتمد على الافتراض غير المثبت بأن التحليل إلى العوامل الأولية صعب. حتى لو كان هذا صحيحًا، ومن المحتمل جدًّا أنه كذلك، فقد تكون هناك طرقٌ أخرى لخرق أمن الشفرة، وينطبق الشيء نفسه على جميع

أنظمة تشفير المفتاح العام الكلاسيكية. إحدى الطرق المحتملة لحدوث ذلك هي إذا ابتكر شخص ما جهاز كمبيوتر أسرع بكثير من أي جهاز متوفر حاليًّا. واليوم، يلوح في الأفق هذا النوع الجديد من التهديد الأمني والمتمثل في الكمبيوتر الكمِّي.

إن أي نظام فيزيائي كلاسيكي يوجد في حالةٍ ما. فالعُملة المعدنية على الطاولة هي إما نقش أو كتابة. والمفتاح إما في وضع التشغيل أو الإيقاف. والرقم الثنائي (أو «البت») في ذاكرة الكمبيوتر هو إما ٠ أو ١. أما الأنظمة الكمية فليست كذلك. إن العنصر الكمي عبارة عن موجة، ويمكن أن تتجمع الموجات بعضها فوق بعض، وهو ما يُسمَّى تقنيًّا بالتراكُب. وحالة التراكب هي مزيج من حالات المكونات. تُعد حالة قطة شرودنجر الشهيرة (وفي الواقع، السيئة السمعة) مثالًا حيًّا: من خلال بعض الحيل مع ذرَّة مُشعَّة وقارورة غاز سامٍّ، جنبًا إلى جنب مع قطة في صندوق غير منفذ، يمكن أن تكون الحالة الكمية للحيوان البائس تراكبًا من حالة «الحياة» وحالة «الموت». إن أي قطة كلاسيكية هي إما حية أو ميتة، ولكن يمكن أن تصبح القطة الكَمِّية في كلتا الحالتين في الوقت نفسه.

إلى أن تفتح الصندوق.

وعندئذٍ «تنهارُ» الدالة المَوجِيَّة للقطة إلى حالة واحدة فقط من الحالتين الكلاسيكيتين. فهي إما أنها حية أو ميتة. الفضول (فتح الصندوق) قتل القطة. أو لا.

لا أريد الخوض في الجدل الخلافي المحتدِم غالبًا حول ما إذا كانت الحالات الكمية ستعمل حقًّا على هذا النحو بالنسبة للقطط.[5] ما يهم هنا هو أن الفيزياء الرياضية تعمل بشكل جيد مع الأشياء الأكثر بساطة التي تُستخدم بالفعل لصنع أجهزة كمبيوتر كمية بدائية. فبدلًا من البت، التي تكون إما ٠ أو ١، أصبح لدينا كيوبت (بت كمي)، يكون ٠ و١ في الوقت نفسه. إن الكمبيوتر الكلاسيكي، الذي من النوع الذي نملكه أنا وأنت على مكاتبنا، أو في حقائبنا، أو في جيوبنا، يتعامل مع المعلومات على شكل تسلسل من ٠ و١. إنه في الواقع يستخدم التأثيرات الكمية للقيام بذلك، في ضوء نطاق دوائر الكمبيوتر الحالية الصغير للغاية، ولكن النتيجة هي أن الحسابات تتوافق مع الفيزياء الكلاسيكية. ويعمل المهندسون الذين يصنعون أجهزة الكمبيوتر الكلاسيكية بكامل جهدهم لضمان بقاء ٠ هو ٠ و١ هو ١، ولن يلتقي الاثنان أبدًا. يجب أن تكون القطة الكلاسيكية إما حية أو ميتة. لذلك يمكن لسجل مكوَّن من ٨ بتات (على سبيل المثال) تخزين تسلسل واحد مثل ٠١١٠١١٠١ أو ١٠٠٠٠١١٠.

في الكمبيوتر الكمي، يسود العكس تمامًا. يمكن لسجل مكون من ٨ كيوبتات تخزين كليهما في الوقت نفسه، جنبًا إلى جنب مع ٢٥٤ تسلسلًا مكونًا من ٨ بتات محتملة

أخرى. علاوة على ذلك، يمكنه عمل عمليات جمع مع جميع الاحتمالات البالغ عددها ٢٥٦ «في الوقت نفسه». يشبه الأمر امتلاك ٢٥٦ جهازَ كمبيوتر بدلًا من جهاز واحد فقط. كلما طالت التسلسلات ازداد عدد الاحتمالات. يمكن لسجل مكون من ١٠٠ بت تخزين تسلسل واحد من ١٠٠ بت. لكن يمكن لسجل مكون من ١٠٠ كيوبت تخزين ومعالجة جميع التسلسلات الممكنة البالغ عددها $١٠^{٣٠}$ المكونة من ١٠٠ بت. هذه هي عملية «معالجة متوازية» على نطاق واسع، وهي ما جعل الكثير من الناس متحمِّسين بشأن أجهزة الكمبيوتر الكمية. فبدلًا من إجراء $١٠^{٣٠}$ عمليات حسابية، كل على حدة، يمكنك أن تجريها «جميعًا في الوقت نفسه».

من حيث المبدأ.

في ثمانينيات القرن الماضي، اقترح بول بينيوف نموذجًا كميًّا لآلة تورينج، وهي الصيغة النظرية للحوسبة الكلاسيكية. بعد فترة وجيزة، أشار الفيزيائي ريتشارد فاينمان وعالم الرياضيات يوري مانين إلى أن الكمبيوتر الكمي قد يكون قادرًا على إجراء عدد ضخم من العمليات الحسابية بالتوازي. وحدث تقدم كبير في الجانب النظري في عام ١٩٩٤ عندما ابتكر بيتر شور خوارزمية كمية سريعة جدًّا لتحليل الأعداد الكبيرة إلى عواملها الأولية. يوضح هذا أن نظام التشفير آر إس إيه قد يكون عُرضةً للهجوم من قِبل عدو باستخدام جهاز كمبيوتر كمي، ولكن الأهم من ذلك أنه يوضح أن الخوارزمية الكمية يمكن أن تتفوق بشكل كبير على الخوارزمية التقليدية في مسألة معقولة وغير مصطنَعة.

من الناحية العملية، فإن العوائق التي تحول دون بناء جهاز كمبيوتر كمي عملي ضخمة. فالاضطرابات الصغيرة من المصادر الخارجية، أو حتى مجرد اهتزاز الجزيئات الذي نُسميه الحرارة، تتسبب في «فك ترابط» الحالة المتراكبة، أي التفكك بسرعة كبيرة. وللتخفيف من هذه المشكلة، في الوقت الحاضر يجب تبريد الجهاز إلى ما يقرب جدًّا من الصفر المطلق، −٢٧٣ درجة مئوية، الأمر الذي يتطلب إمدادات من الهيليوم−٣، وهو منتج ثانوي نادر للتفاعلات النووية. حتى هذا لا يمكن أن يمنع حدوث فك الترابط؛ إنه فقط يقلل من سرعته. لذلك يجب دعم كل عملية حسابية بنظام تصحيح أخطاء يكتشف الاضطراب من المصادر الخارجية، ويعيد حالات الكيوبت إلى حيث يجب أن تكون. تخبرنا «مبرهَنَة العتبة الكمية» أن هذه التقنية تعمل بشرط أن تتمكن من تصحيح الأخطاء على نحوٍ أسرع من تكوينها بسبب فك الترابط. وكتقدير تقريبي، يجب أن يكون معدل الخطأ لكلِّ بوابة منطقية واحدًا في الألف على الأكثر.

تؤدي عملية تصحيح الخطأ أيضًا إلى عقوبة؛ حيث تتطلب المزيد من الكيوبتات. على سبيل المثال، لتحليل عدد يمكن تخزينه في عدد n من الكيوبتات باستخدام خوارزمية شور، تُجرى العملية الحسابية في زمن يتناسب تقريبًا مع عدد بين n وn^2. ومع عملية تصحيح الخطأ، وهي أمر ضروري عمليًّا، يصبح العدد n^3 تقريبيًا. وبالنسبة لعدد يخزن في ١٠٠٠ كيوبت، تضاعف عملية تصحيح الخطأ زمن التشغيل بمقدار ألف.

حتى وقت قريب جدًّا، لم يصنع أحد كمبيوترًا كميًّا له أكثر من عدد قليل من الكيوبتات. في عام ١٩٩٨، استخدم جوناثان إيه جونز وميشيل موسكا جهازًا له كيوبتان لحل مسألة دويتش. وهذه المسألة نتجت من أبحاث ديفيد دويتش وريتشارد جوزا في عام ١٩٩٢. وهي خوارزمية كمية تعمل بشكل أسرع بكثير من أي خوارزمية تقليدية، وتعطي دائمًا إجابة، وهذه الإجابة صحيحة دائمًا. وفيما يلي المسألة التي تحلها. هناك جهاز افتراضي، يُسمَّى «أوراكل»، ينفذ دالة بولينية تحول أي سلسلة بت مكونة من n من الأرقام إلى ٠ أو ١. رياضيًّا، جهاز أوراكل «هو» تلك الدالَّة. قيل لنا أيضًا إن الدالة البولينية تأخذ القيمة إما ٠ في كل مكان، أو ١ في كل مكان، أو ٠ في نصف سلاسل البت بالضبط و١ في النصف الآخر. تكمن المشكلة في تحديد أي من هذه الحالات الثلاث يحدث، من خلال تطبيق الدالة على سلاسل البت ومراقبة النتيجة. إن مسألة دويتش مصطَنَعة بشكل متعمد، وهي إثبات للمفهوم أكثر من كونها عملية. وتتمثل ميزتها في أنها تعرض مسألة محددة تتفوق فيها خوارزمية كمية بشكل مُثبت على أي خوارزمية تقليدية. من الناحية التِّقنية، هي تثبت أن فئة التعقيد EQP (حلول الزمن الخطي الدقيقة على الكمبيوتر الكمي) تختلف عن الفئة P (حلول الزمن الخطي الدقيقة على الكمبيوتر التقليدي).

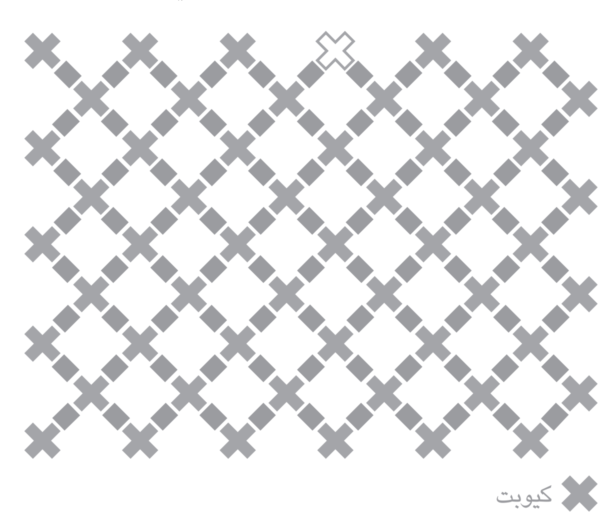
كما شهد عام ١٩٩٨ أيضًا ظهور جهاز له ٣ كيوبتات، وفي عام ٢٠٠٠ ظهرت أجهزة ذات ٥ و٧ كيوبتات. وفي عام ٢٠٠١، نفذ ليفن فاندرسايبن وزملاؤه[6] خوارزمية شور باستخدام سبع أنوية لها عدد لفٍّ مغزلي يساوي نصف في جزيء مركب خصوصًا مثل البِتات الكمية، التي يمكن معالجتها بتقنيات الرنين المغناطيسي النووي السائل الحالة في درجة حرارة الغرفة، للعثور على العوامل الأولية للعدد الصحيح ١٥. معظمنا يمكنه أن يفعل ذلك باستخدام عقله، لكن هذا كان إثباتًا مهمًّا للمفهوم. وبحلول عام ٢٠٠٦، وصل الباحثون إلى ١٢ كيوبتًا، مع مزاعم بالوصول إلى ٢٨ كيوبتًا في عام ٢٠٠٧ من قِبل شركة تُسمى دي-ويف.

أثناء حدوث ذلك، زاد الباحثون بشكل كبير من طول المدة الزمنية التي يمكن أن تستمر فيها الحالة الكمية، قبل فك الترابط. في عام ٢٠٠٨، خُزِّن كيوبت لأكثر من ثانية في نواة ذرية. وبحلول عام ٢٠١٥ أصبح زمن الاحتفاظ بالحالة ست ساعات. والمقارنة بين هذين الزمنين صعبة؛ لأن الأجهزة المختلفة تستخدم طرقًا كمية مختلفة، لكن التقدم كان مثيرًا للإعجاب. في عام ٢٠١١، أعلنت شركة دي–ويف أنها صنعت جهاز كمبيوتر كميًّا متاحًا للاستخدام التجاري، وأطلقت عليه اسم «دي–ويف وان»، وكان مزوَّدًا بمُعالج ١٢٨ كيوبتًا. وبحلول عام ٢٠١٥، زعمت الشركة أنها تجاوزت ١٠٠٠ كيوبت.

كانت الاستجابة المبكرة لادعاءات شركة دي–ويف متشكِّكة. إذ إن معمارية الجهاز كانت غير عادية، وتساءل البعض عما إذا كان جهازَ كمبيوتر كميًّا حقيقيًّا أم أنه جهاز كمبيوتر كلاسيكي فائق يستخدم أدوات ذات صلة بالكم. في الاختبارات، تفوق في الأداء على أجهزة الكمبيوتر المعتادة في مهام مفيدة، لكنه صُمِّم خصوصًا لتلك المهام، في حين أن أجهزة الكمبيوتر الكلاسيكية التي كانت تتنافس معه لم تكن كذلك. يبدو أن مزاياه تختفي عند المقارنة مع الأجهزة الكلاسيكية التي صُمِّمت خصوصًا لنفس المهام المصمم هو من أجلها. ويستمر الجدل، ولكن أجهزة شركة دي–ويف قيد الاستخدام وتعمل بشكل جيد.

الهدف الرئيسي للبحث هو التفوُّق الكمي؛ صنع جهاز كمي يتفوق في الأداء على أفضل أجهزة الكمبيوتر الكلاسيكية في عملية حسابية واحدة على الأقل. في عام ٢٠١٩، نشر فريق في شركة جوجل إيه أي ورقة بحثية في دورية «نيتشر» بعنوان «التفوق الكمي باستخدام معالج فائق التوصيل قابل للبرمجة».[7] وأعلنوا أنهم صنعوا معالجًا كميًّا يُسمى «سيكامور» له ٥٤ كيوبتًا، لكن واحدًا فشل، مما قلل العدد إلى ٥٣. واستخدموه لحل مسألة في ٢٠٠ ثانية، سيستغرق الكمبيوتر الكلاسيكي ١٠ آلاف سنة لحلها.

جرى تحدي هذا الزعم على الفور لسببين. كان أحدهما أن حل المشكلة يمكن أن يتم على الأرجح في وقت أقصر بواسطة كمبيوتر كلاسيكي. وكان الآخر هو أن المسألة التي حلها «سيكامور» كانت مفتعَلَة إلى حد ما: أخذ عينات من مخرج دائرة كمية شبه عشوائية. يربط تخطيط الدائرة المكونات على نحوٍ عشوائي، والهدف هو حساب التوزيع الاحتمالي لعينة من المخرجات الممكنة. تبيَّن أن بعض المخرجات أكثر احتمالية بكثير من غيرها، لذا فإن هذا التوزيع غير منتظم ومعقد للغاية. يزداد الحساب الكلاسيكي بشكل أُسِّي مع عدد الكيوبت. ومع ذلك، نجح الفريق في هدفه الأساسي، وهو إظهار أنه لا توجد عقبة عملية أمام صنع كمبيوتر كمي يمكنه التغلب على الأجهزة الكلاسيكية في «شيءٍ ما».



معمارية المعالج الكمي «سيكامور».

إن السؤال الذي يتبادر إلى الذهن على الفور هو: كيف نعرف ما إذا كان الحل صحيحًا أم لا؟ لا يمكننا الانتظار ١٠ آلاف عام حتى يتمكن الكمبيوتر الكلاسيكي من حل المسألة، ولا يمكننا ببساطة تصديق النتيجة دون التحقُّق منها. لذا عالج الفريق هذا باستخدام طريقة تُسمَّى تقييم الأنتروبيا المتقاطعة، التي تقارن احتمالات سلاسل بت محددة مع أخرى نظرية محسوبة على جهاز كمبيوتر كلاسيكي. يوفر هذا مقياسًا لمدى احتمالية أن تكون النتيجة صحيحة؛ كان الاستنتاج هو أن الحل دقيق في حدود ٠٫٢٪ هامش خطأ مع احتمالية يقين مرتفعة جدًّا («خمسة سيجما»).

على الرغم من كل هذا التقدم، يعتقد معظم الخبراء أن الكمبيوتر الكمي العملي لا يزال بعيد المنال. وبعضهم يظل غير مقتنع بإمكانية صنعه على الإطلاق. وقد كتب الفيزيائي ميخائيل دياكونوف يقول:

> يجب أن يكون عدد المعاملات المتصلة التي تصف حالة مثل هذا الكمبيوتر الكمي المفيد في أي لحظة محددة ... حوالي 10^{300}. ... هل يمكننا يومًا أن نتعلَّم التحكم في المعاملات المتغيرة باستمرار التي تزيد عن 10^{300}، والتي تحدد الحالة الكمية لمثل هذا النظام؟ جوابي بسيط. كلا، على الإطلاق.

قد يكون دياكونوف على حق، لكن البعض الآخر يختلف معه. في كلتا الحالتين، فإن مجرد احتمال أن يقوم أحد — ربما فريق بحثي ضخم تموله حكومة أو شركة كبرى — بصناعة جهاز كمبيوتر كمي يكفي لأن تُداهم الكوابيس أجهزة المخابرات والصناعات المالية الخاصة بالعديد من الدول. وستصبح قوات العدو قادرة على فك تشفير الرسائل العسكرية؛ وسيتمكن المجرمون من تدمير التجارة والخدمات المصرفية عبر الإنترنت. لذلك وجه المنظِّرون انتباههم إلى الشكل الذي سيبدو عليه التشفير في عالم ما بعد الكم، في محاولة للاستعداد لأي طارئ والحفاظ على أمن الاتصالات.

الخبر السار هو أن ما يمكن للكمبيوتر الكمي اختراقه يمكن له أيضًا أن يجعله غير قابل للاختراق. يتطلب هذا أساليب تشفير جديدة، باستخدام الحَوسَبة الكمية لإنشاء شفرات جديدة لا يمكن حتى للكمبيوتر الكمي اختراقها. قد يستلزم ذلك طريقة جديدة للتفكير في الجوانب الرياضية المتضمَّنة في هذا الأمر. وهناك ميزة مثيرة للاهتمام هي أن الكثير منها لا يزال يستخدم نظرية الأعداد، على الرغم من كونها أكثر حداثة من تلك التي وضع أساسها فيرما.

لقد أدى الظهور الوشيك لأجهزة الكمبيوتر الكمية إلى موجة من الأبحاث التي ابتكرت طرق تشفير لا يمكن اختراقها بواسطة الكمبيوتر الكمي. إذ بدأ المعهد الوطني الأمريكي للمعايير والتكنولوجيا مؤخرًا برنامجًا معنيًّا بتشفير ما بعد الكم، يهدف إلى تحديد نظم التشفير الكلاسيكية المعرَّضة للخطر وإيجاد طُرق جديدة لمكافحة نقاط ضعفها. في عام ٢٠٠٣، توقع جون بروس وكريستوف زالكا[8] أن نقطة ضعف نظام تشفير آر إس إيه وتشفير المنحنى الإهليلجي هي إمكانية اختراقهما بواسطة كمبيوتر كمي يستخدم خوارزمية شور. وقد حدَّث مارتن روتلر وزملاؤه[9] نتائجهم في عام ٢٠١٧. وأثبتوا أنه بالنسبة لمنحنًى إهليلجي على حقل منتهٍ له عناصر عددها q، حيث q تساوي 2^n تقريبًا، يصبح نظام آر إس إيه عُرضةً للاختراق من جهاز كمبيوتر كمِّي له كيوبتات تساوي $9n + 2\log_2 n + 10$ ودائرة لها $448n^3\log_2 n + 4090n^3$ من بوابات توفولي. وبوابة توفولي هي نوع خاص من الدوائر المنطقية، يمكن من خلالها بناء دوائر لتنفيذ أي وظيفة منطقية. علاوة على ذلك، يمكن عكسها؛ حيث يمكنك العمل بشكل عكسي من المخرج لاستنتاج المُدخَلات. والمعيار الحالي لنظام آر إس إيه هو استخدام عدد له ٢٠٤٨ بتًّا، أي، حوالي ٦١٦ موضعًا عشريًّا. وتوقع الفريق أن نظام آر إس إيه له ٢٠٤٨ بتًّا سيصبح عُرضة للاختراق بواسطة كمبيوتر كمي له $n = 256$، وأن تشفير المنحنى الإهليلجي سيصبح عُرضة للاختراق بواسطة كمبيوتر كمي له $n = 384$.

إن تحديد نقاط الضعف أمر جيد للغاية، لكن السؤال الكبير هو: ما الذي يجب القيام به للحماية منها؟ يتطلب هذا أساليب تشفير جديدة تمامًا. والفكرة العامة هي نفسها دائمًا: وضع طريقة التشفير بِناءً على مسائل رياضية صعبة مع باب خلفي سهل من نوع ما. ولكن الآن تعني كلمة «صعبة» أنها «صعبة على الكمبيوتر الكمي». في الوقت الحالي، جرى تحديد أربع فئات رئيسية من المسائل من هذا النوع:

- شفرات تصحيح أخطاء عشوائية خطية
- حل أنظمة المعادلات غير الخطية في حقول منتهية ضخمة
- إيجاد متجهات قصيرة في شبكات عالية الأبعاد
- إيجاد مسارات بين الرءوس العشوائية للرسوم البيانية التي تبدو عشوائية

دعونا نلقِ نظرة سريعة على الفئة الرابعة، والتي تتضمن أحدث الأفكار وبعض الجوانب الرياضية المتقدمة جدًّا.

لأغراضٍ عملية، سنعمل على رسم بياني به نحو ١٠٧٥ رأسًا وعدد كبير على نحو مماثل من الحواف. تعتمد الشفرة على إيجاد مسار من خلال هذا الرسم البياني بين رأسين محددين. هذا شكل من مسألة البائع المتجوِّل، وهو معقد مثلها. لإنشاء باب خلفي، يجب أن يحتوي الرسم البياني على بِنية خفية ما تجعل الحل سهلًا. والفكرة المركزية هي استخدام الرسوم البيانية التماثُلية المتفردة، وهو اسم يتَّسم باللطف كما تلاحظون. يجري تعريف هذه الرسوم باستخدام منحنيات إهليلجية ذات خصائص خاصة، يُقال إنها متفردة. تناظر رءوس الرسم البياني «جميع» المنحنيات الإهليلجية المتفردة عبر الإغلاق الجَبري لحقل منتهٍ عدد عناصره p. هناك حوالي $p/12$ من مثل هذه المنحنيات.

إن التماثل بين اثنين من المنحنيات الإهليلجية هو خريطة متعددة الحدود من واحد إلى الآخر تحافظ على بنية مجموعة مورديل–فاي. ونحن نستخدم التماثلات لتحديد حواف الرسم البياني. للقيام بذلك، نأخذ عددًا أوليًّا ثانيًا q. تتناظر حواف هذا الرسم البياني مع تماثلات درجة q بين المنحنيين الإهليلجيين المناظرين لنهايات تلك الحافة. ينبثق عدد من الحواف قدره تحديدًا $q + 1$ من كل رأس. هذه الرسوم البيانية هي رسوم بيانية «موسعة»، مما يعني أن المسارات العشوائية التي تبدأ من أي رأس تتباعد بسرعة مع تقدم المسار، على الأقل لعدد ضخم من الخطوات.

يمكن استخدام الرسم البياني الموسع لصياغة دالة هاش، وهي دالة بولينية تحول السلاسل التي عدد بتاتها n إلى أخرى عدد بتاتها m، حيث m أقل بكثير من n. يمكن

لأليس استخدام دالة هاش لإقناع بوب بأنها تعرف سلسلة معينة عدد بتاتها n، والمعروفة أيضًا لبوب، «دون الكشف عن ماهيتها». هذا يعني أنها ستصوغ أقصر دالة هاش لتلك السلسلة وترسلها إلى بوب. وهو سيحسب دالة هاش الخاصة بسلسلته، ويقارن ليتأكد من صدق كلام أليس.

هناك حاجة إلى شرطين لكي تكون هذه الطريقة آمنة. أحدهما هو شرط باب أفقي يُسمى مقاومة العكس: ليس من الممكن حسابيًّا عكس دالة الهاش وإيجاد سلسلة عدد بتاتها n تعطي هذا الهاش. سيكون هناك الكثير من تلك السلاسل بوجه عام، ولكن القصد هو أنه من الناحية العملية لا يمكنك إيجاد «أي منها». أما الشرط الآخر فهو دالة هاش مقاوِمة للتعارض، مما يعني أنه ليس من السهل حسابيًّا العثور على سلسلتين مختلفتين عدد بتات كل منهما n لهما نفس الهاش الذي عدد بتاته m. ما يعنيه هذا هو أنه إذا سمعت المتنصتة إيف المحادثة، فإن الهاش الذي ترسله أليس لا يساعدها في معرفة السلسلة الأصلية التي عدد بتاتها n.

بالنظر إلى اثنين من الأعداد الأولية p وq مع بعض الشروط التقنية الإضافية، يمكننا استغلال هذه الفكرة من خلال إنشاء الرسم البياني التماثلي المتفرد المقابل واستخدام خصائصه الموسعة لتحديد دالة هاش مقاوِمة للتعارض ومقاوِمة للعكس. يمكن بعد ذلك استخدام هذا لإنشاء شفرة آمنة للغاية. ويتطلب اختراق الشفرة حساب الكثير من التماثلات بين المنحنيات الإهليلجية. وتعمل أفضل خوارزمية كمية للقيام بمثل هذه الحسابات في زمن قدره $p^{1/4}$. اجعل p وq كبيرين بما يكفي (تخبرنا الرياضيات عن مدى حجمهما) وستحصل على نظام تشفير لا يمكن حتى للكمبيوتر الكمي اختراقه.

كل هذه الأمور تقنية للغاية. لا أتوقع منك أن تفهم التفاصيل وأنا لم أخبرك بمعظمها. لكنني آملُ أن يصلك مقصدي وهو أن الرياضيات المتقدمة والمجردة جدًّا، ذات الصلة بالهندسة الجبرية والحقول المنتهية، ربما هي فقط ما نحتاجه لحماية اتصالاتنا الشخصية والتجارية والعسكرية من المتنصتين المسلحين بأجهزة كمبيوتر كمية هي حاليًّا افتراضية، ولكن من المحتمل قريبًا أن تصبح حقيقة واقعة.

لقد أصبحت نظرية الأعداد المحبوبة لدى هاردي أكثر فائدة بكثير مما كان يُتصوَّر. لكن بعض تطبيقات اليوم كانت ستصيبه بخيبة أمل. لذا، ربما يجب أن نعتذر له.

الفصل السادس

مستوى الأعداد

لقد وجدَت «الروح المقدسة» منفذًا ساميًّا في أعجوبة التحليل تلك، بشارة العالم المثالي تلك، ذلك الشيء الذي بين حالة الوجود وحالة العدم، والذي نسميه الجذرَ التخيُّلي للوحدة السالبة.

جوتفريد فيلهلم لايبنتس، دورية «أكتا إروديتوروم»، ١٧٠٢

نحن الآن في خضم ثورة كمية ثانية. لقد أعطتنا الثورة الكمية الأولى قواعد جديدة تحكم الواقع المادي. وستأخذ الثورة الكمية الثانية هذه القواعد وتستخدمها لتطوير تقنيات جديدة.

جوناثان داولينج، وجيرارد ميلبرن،
دورية «فيلوسوفيكال ترانزاكشانز أوف ذا رويال سوسايتي»، ٢٠٠٣

كان هناك الكثير من النشاط في الجزء الخاص بنا من مدينة كوفنتري في الأشهر الأخيرة. كانت الشاحنات الصغيرة البيضاء متوقفة في كل مكان على جانب الطريق، وغالبًا ما ترافقها شاحنات كبيرة محملة بالمجارف وعربات اليد. وأخذت حفارات صغيرة تجول الشوارع على عجلاتها المجنزَرة، لتحفر حفرًا على طول الأرصفة، وعبر الطرق، وداخل الحدائق، وأخذ الأسفلت الذي وُضع حديثًا بعد هذا الحفر يتلوَّى وسط المكان مثل آثارٍ لزجة خلفتها حلزونات ضخمة. وظهر رجال يرتدون سترات أعطال، ويبدو أنهم قد ابتلعتهم فتحات في الأرض؛ حيث انفتحت أغطية غرف التفتيش. تُزين لفائف الكابلات حواف الطريق وتستند على الأسيجة الشجرية، في انتظار أن تُدخَل في غرف التفتيش.

ويجلس المهندسون في حيرة من أمرهم تحت المظلات وسط المطر، وهم يعبثون بآلاف الأسلاك المرمَّزة بالألوان داخل الصناديق المعدنية الكبيرة.

تحمل الشاحنات الصغيرة رسالة على جانبها تشرح كل هذا النشاط. إنها تقول: «شبكة ألياف واسعة النطاق فائقة السرعة في منطقتك».

لقد زُودت مراكز المدن في المملكة المتحدة بأعجوبةِ الاتصالات الحديثة هذه منذ سنوات، لكن منزلنا يقع في منطقة ريفية نائية. وقد رفضت إحدى الشركات المتخصصة في هذا المجال ذات مرة القدوم إلينا لأنها كانت بعيدة للغاية عنا؛ على بعد أربعة أميال. ولكي نكون منصفين، لا تبعد حدود المدينة سوى بضع مئاتٍ من الياردات. ويعتبر تزويدنا بالكابلات أكثر تكلفة، كما أن الكثافة السكانية أقل؛ لأن أغلب المنطقة فيما يتجاوز الحدود عبارة عن حقول للمزارعين. لذا، فلا يوجد توسع سهل في هذا الاتجاه بتكلفة بسيطة. ولم نكن نمثل فرصة استثمارية جذابة. ولكن أخيرًا، بعد أن بدأت الحكومة في الضغط على شركات الاتصالات، أصبحت هناك دفعة قوية لتوصيل وصلات الألياف الضوئية لجميع المناطق الحضَرية ومعظم المناطق الريفية. وبدلًا من المراقبة اليائسة للمناطق ذات الكثافة السكانية العالية وهي تُمَد مرارًا وتكرارًا بخدمات أسرع من ذي قبل، لأن هذه المناطق أكثر ربحية، أصبحت بقية البلاد أخيرًا تسعى للَّحاق بالركب. أو، على الأقل، تسعى ألا تتخلف كثيرًا عن الركب.

في عصر تحولت فيه كل الأنشطة تقريبًا إلى الإنترنت، أصبحت الشبكة السريعة الواسعة النطاق ضرورة أساسية بعد أن كانت رفاهية. ربما هي ليست أمرًا حيويًّا مثل الماء أو الكهرباء، ولكنها على الأقل ضرورية مثل الهاتف. فقد حولت الإلكترونيات المتقدمة التي تقود ثورة الكمبيوتر والاتصالات العالمية السريعة عشرينيات هذا القرن إلى عالم كان سيبدو غريبًا تمامًا في تسعينيات القرن العشرين. وهي فقط في بداياتها. وتؤدي زيادة العرض إلى نُمو هائل في الطلب. وتختفي بسرعة الأيام التي كانت فيها خطوط الهاتف مصنوعة من النحاس وتنقل المحادثات فقط، وحتى تلك كانت لا تزال تعمل، في السنوات الأخيرة، بسبب بعض الحيل الإلكترونية والرياضية الماهرة لزيادة السعة. أما اليوم، فتحمل كابلات الاتصالات بياناتٍ أكثر بكثير من مجرد المحادثات الهاتفية. لهذا السبب برزت بشدة الألياف الضوئية.

وفي غضون بضعة عقود، ستصبح الألياف أمرًا عفا عليه الزمن مثل الحصان والعربة. إن التطورات المستقبلية، التي تسمح بنقل كميات أكبر بكثير من البيانات بسرعة

مذهلة، هي في طور التنفيذ. وبعضها موجود بالفعل. إن الفيزياء الكلاسيكية للكهرباء والمغناطيسية ستبقى أساسية، لكن المهندسين الإلكترونيين يتجهون بشكل متزايد إلى عالم الكم الغريب لبناء الجيل التالي من أجهزة الاتصالات. إن الفيزياء الكلاسيكية وميكانيكا الكم اللتَين تعتمد عليهما كل هذه التطورات تقومان على أحد أكثر الابتكارات الرياضية غرابةً على الإطلاق. وهو ابتكار تعود جذوره إلى اليونان القديمة، وقد اكتسب بعض التقدير خلال عصر النهضة الإيطالية، ووصل إلى مرحلة الازدهار الكامل في القرن التاسع عشر، عندما استحوذ بسرعة على معظم المجالات الرياضية. وقد استُخدم على نطاق واسع قبل زمن طويل من الفهم الكامل لماهيته.

وأنا أسميه ابتكارًا وليس اكتشافًا لأنه لم يُستلهم من العالم الطبيعي. إذا كان هناك في مكان ما في انتظار العثور عليه، إذن ذلك المكان هو مكان غريب جدًّا، إنه عالم الخيال البشري والتزامات المنطق والتركيب. لقد كان نوعًا جديدًا من الأعداد، جديدًا للغاية؛ لدرجة أنه أطلق عليه وصف «تخيُّلي». لا يزال هذا الوصف قيد الاستخدام اليوم، وتظل الأعداد التخيلية غريبة تمامًا على معظمنا، على الرغم من أن حياتنا تعتمد عليها بشكل متزايد.

لقد سمعت عن خط الأعداد.

والآن تعرَّف على مستوى الأعداد.

لفهم كيفية حدوث هذا التطور الغريب وسببه، يجب علينا أولًا إلقاء نظرة على أنواع الأعداد التقليدية. إن الأعداد عادية جدًّا، ومألوفة جدًّا، لدرجة أنه من السهل أن نغفل تعقيداتها وتفاصيلها. نعلم أن اثنين زائد اثنين يساوي أربعة، وخمسة في ستة يساوي ثلاثين. لكن ما هي «اثنان» و«أربعة» و«خمسة» و«ستة» و«ثلاثون»؟ إنها ليست الكلمات؛ إذ تستخدم اللغات المختلفة كلمات مختلفة لنفس الأعداد. إنها ليست الرموز ٢، و٤، و٥، و٦، و٣٠؛ فالثقافات المختلفة تستخدم رموزًا مختلفة. في الترميز الثنائي المستخدم في الحَوسَبة، تُمثَّل هذه الأعداد كالتالي: ١٠ و١٠٠ و١٠١ و١١٠ و١١١١٠. على أي حال، ما الرمز؟

كان الأمر أكثر بساطة عندما كان يُنظر إلى عدد ما على أنه وصف مباشر للطبيعة. إذا كنت تمتلك عشرة خراف، فإن العدد عشرة كان بيانًا بعدد الخراف التي تمتلكها. إذا بعت أربعة منها، فسيتبقى لديك ستة. كانت الأعداد في الأساس أداة محاسبة. ولكن عندما بدأ علماء الرياضيات في استخدام الأعداد بطرق أعقد، بدأت هذه النظرة البرجماتية تبدو مهتزة إلى حد ما. إذا كنت لا تعرف ما هي الأعداد، فكيف يمكنك التأكد من أن حساباتك

لن تتعارض أبدًا بعضها مع بعض؟ إذا عدَّت الفلاحة نفس قطيع الخراف مرتين، فهل ستحصل بالضرورة على نفس الإجابة؟ وهنا، ماذا نعني ب «العد»؟

في القرن التاسع عشر، خطرت على الأذهان أسئلة نيِّقة من هذا النوع، لأن علماء الرياضيات كانوا قد وسَّعوا مفهوم الأعداد عدة مرات. وتضمنت كل نسخة جديدة ما حدث من قبل، لكن الارتباط بالواقع كان يصبح غير مباشر بشكل متزايد. أول ما ظهر في المشهد كانت الأعداد «الطبيعية» أو «الصحيحة» أو أعداد «العد» ١، ٢، ٣، وهكذا. بعد ذلك، ظهرت الكسور مثل ١ / ٢ أو ٢ / ٣ أو ٣ / ٤. وفي مرحلةٍ ما تسلل الصفر لينضم إليها. حتى تلك المرحلة، كان التناظر مع الواقع مباشرًا إلى حد ما؛ خذ برتقالتين ثم ثلاث برتقالات أخرى، وعُدَّها للتحقق من أن المجموع هو خمس برتقالات. بمساعدة سكين المطبخ، يمكنني أن أريكم نصف برتقالة. ولكن ما هو العدد صفر من البرتقالات؟ إنها اليد الفارغة.

حتى هنا، هناك صعوبات. نصف برتقالة ليست بالضبط «عدد» من البرتقالات. إنها ليست برتقالة على الإطلاق، وإنما جزء من برتقالة. هناك العديد من الطرق لقطع برتقالة إلى نصفين، ولا تبدو جميعها متشابهة. إن الأمر أبسط مع أطوال الخيوط، بشرط أن نقطعها بالطريقة الواضحة ولا نفعل شيئًا سخيفًا مثل تقسيم الخيوط بالطول. الآن كل شيء بسيط مرة أخرى. يكون لقطعة من الخيط نصف طول قطعة أخرى، إذا رُبطت نسختان من القطعة الأولى معًا، وكانا لهما طول القطعة الثانية نفسه. تعمل الكسور على أفضل نحوٍ عند «قياس» الأشياء. وقد وجد اليونانيون القدماء سهولة في التعامل مع القياسات مقارنةً برموز الأعداد؛ لذلك عكس إقليدس هذه الفكرة. فبدلًا من استخدام عددٍ لقياس طول خط، استخدم الخط لتمثيل العدد.

الخطوة التالية، الأعداد السالبة، أكثر تعقيدًا؛ لأننا لا نستطيع أن نجسد لأي شخص العدد سالب أربع برتقالات. الأمر أسهل باستخدام المال، حيث يمكن تفسير العدد السالب على أنه دَين. فُهم كل هذا في الصين حوالي عام ٢٠٠ بعد الميلاد، وكان أول مصدر معروف هو كتاب «تسعة فصول عن الفن الرياضي»، لكن الفكرة كانت أقدم بلا شك. عندما ترتبط الأعداد بالقياسات، تنشأ تفسيرات أخرى للقيم السالبة على نحو طبيعي. على سبيل المثال، يمكن تفسير درجة الحرارة السالبة على أنها درجة حرارة أقل من الصفر، في حين أن درجة الحرارة الموجبة تكون أعلى من الصفر. في بعض الظروف، يقع القياس الموجب على يمين نقطة ما، بينما يقع القياس السالب على يسارها، وهكذا. إن السالب هو عكس الموجب.

في الوقت الحاضر، يثير علماء الرياضيات ضجة كبيرة حول الفروق بين هذه الأنواع من أنظمة الأعداد، ولكن بالنسبة للمستخدمين العاديين، فإنها جميعًا صور مختلفة

للموضوع نفسه: الأعداد. يسعدنا مواكبة هذا العرف الساذج إلى حد ما؛ لأن قواعد الحساب نفسها تعمل في كل هذه الأنظمة، ولأن كل نوع جديد من الأعداد يوسع فقط النظام القديم دون تغيير ما نعرفه بالفعل. إن ميزة توسيع مفهوم الأعداد تكمن في أن كل تمديد يجعل من الممكن إجراء «عمليات حسابية» كانت مستحيلة في السابق. في الأعداد الصحيحة لا يمكننا قسمة ٢ على ٣؛ لكننا نستطيع ذلك في الكسور. في الأعداد الصحيحة لا يمكننا طرح ٥ من ٣؛ في الأعداد السالبة نستطيع. كل هذا يجعل الرياضيات «أكثر بساطة»؛ لأنه يمكنك التوقف عن القلق بشأن ما إذا كانت بعض العمليات الحسابية مسموحًا بها أم لا.

يمكن أن تقسم الكسور الأشياء كما نرغب. يمكننا تقسيم المتر إلى ملِّيمترات، أي واحد على ألف من قيمته، أو ميكرومترات، أي واحد على مليون من قيمته، أو نانومترات، أي واحد على مليار من قيمته، وهكذا. إن المسميات تَنفَد في هذا الصدد قبل وقت طويل من نفاد الأصفار. وعمليًّا، هناك دائمًا أخطاء صغيرة في القياس؛ لذا فإن الكسور هي كل ما نحتاج إليه. في الواقع، يمكننا القيام بمعظم الحسابات فقط باستخدام الكسور العشرية؛ انظر إلى أي آلة حاسبة إلكترونية. ولكن للأغراض النظرية الحيوية، وللحفاظ على ترابط وجمال الرياضيات، ثبت أن الكسور غير كافية.

اعتقدت الطائفة الفيثاغورية اليونانية القديمة أن الكون يعمل على أساس الأعداد، وهي وجهة نظر لا تزال سائدة في الفيزياء الحديثة، وإن كان ذلك بطريقة أكثر تعقيدًا. كانت الأعداد الوحيدة التي تعرَّفوا عليها هي الأعداد الصحيحة والكسور الموجبة. لذلك صُدِمت منظومة معتقداتهم بشدة عندما اكتشف أحدهم أن طول قُطر المربع لا يمكن تمثيله بكسرٍ من طول ضِلعه. أدى هذا الاكتشاف إلى ما يُسمَّى بالأعداد «غير النسبية»، وهي في هذه الحالة الجذر التربيعي للعدد ٢. وفي تطور تاريخي معقَّد يمتد من الصين في القرن الرابع قبل الميلاد إلى سيمون ستيفين في عام ١٥٨٥، جرى تمثيل هذه الأعداد على هيئة أعداد عشرية:

$$\sqrt{2} = 1.414, 213, 562, 373, 095, 048, \ldots$$

ولأن هذا العدد غير نسبي، يجب أن يستمر إلى «ما لا نهاية»، دون الانتهاء بعدد من الأصفار. لا يمكنه حتى تكرار مجموعة الأرقام نفسها مرارًا وتكرارًا، مثل ١ / ٣، الذي يصبح بالصيغة العشرية ٠٫٣٣٣٣٣٣٣٣.... إنه «عدد عشري غير منتهٍ». لا يمكننا أبدًا

كتابته بالكامل، ولكن من الناحية المفاهيمية يمكننا التظاهر بأن هذا ممكن؛ لأنه من حيث المبدأ يمكننا كتابة أكبر عدد من أرقامه مثلما نرغب.

بغض النظر عن الحاجة إلى اللجوء إلى عملية غير منتهية، فإن الأعداد العشرية غير المنتهية لها خواص رياضية ممتعة للغاية، وعلى وجه الخصوص هي توفِّر تمثيلات «دقيقة» للقياسات الهندسية مثل $\sqrt{2}$، التي لولا ذلك لما كانت ستصبح لها قِيَم عددية على الإطلاق. وأصبحت الأعداد العشرية غير المنتهية تُسمى أعدادًا «حقيقية»؛ لأنها كانت قياسات (مثالية) للقياسات الحقيقية، مثل الطول أو المساحة أو الحجم أو الوزن. ويمثل كل رقم لاحق مضاعف قياس محدد يُقسم على ١٠ في كل خطوة. يمكننا أن نتخيل استمرار هذا الإجراء إلى ما لا نهاية، مع عمليات القسمة الفرعية التي تُصبح أدقَّ؛ وهذا يتيح لنا تمثيل العدد المعنِي بدقة عالية. إن الفيزياء الحقيقية ليست كذلك على المستوى الذَّرِّي، والفراغ نفسه على الأرجح ليس كذلك، لكن الأعداد الحقيقية تمثل الواقع بشكل جيد للغاية في العديد من الحالات.

تاريخيًّا، واجهت الأنواع الجديدة من الأعداد عمومًا مقاومة عند اقتراحها لأول مرة. ثم، عندما اتضحت فائدتها، وأصبحت استخداماتها راسخة، تحمَّس الناس لها. وفي غضون جيل واحد، اختفت معظم المقاومة؛ إذ لو نشأت على استخدام شيء ما بانتظام، فسيبدو أنه طبيعي تمامًا. يمكن للفلاسفة أن يتجادلوا حول ما إذا كان الصفر عددًا، وما زالوا يفعلون ذلك، لكن الناس العاديين استخدموه عند الحاجة وتوقفوا عن التساؤل عن ماهيَّته. حتى علماء الرياضيات فعلوا ذلك، رغم شعورهم بالذنب من حين لآخر. إن التسميات كانت تشي بالتحفظات المبدئية تجاه هذه الأعداد: كانت الأعداد الجديدة سالبة أو غير نسبية؛ ويعني مقابلها الإنجليزي غير منطقية.

ومع ذلك، حتى بين علماء الرياضيات، تسبَّبت بعض الابتكارات في حدوث مشكلات استمرت لعدة قرون. إن ما أثار الجدل بشدة «فعلًا» هو تقديم ما يُسمَّى بالأعداد «التخيُّلية». حتى الاسم (الذي لا يزال مستخدمًا لأسباب تاريخية فقط) يشير إلى درجة من الحيرة، فهو تلميح إلى أن هذه الأعداد كانت سيئة السمعة إلى حدٍّ ما. مرة أخرى، كانت القضية الأساسية هي الجذور التربيعية.

بمجرد أن وسَّعنا نظام الأعداد ليشمل الأعداد العشرية غير المنتهية، يصبح لكل عدد موجب جذر تربيعي. في الواقع، إن له اثنين: أحدهما موجب، والآخر سالب. على سبيل

المثال، العدد ٢٥ له جذران تربيعيان، +٥ و−٥. هذه الحقيقة الغريبة هي نتيجة لقاعدة «سالب في سالب يساوي موجبًا»، التي غالبًا ما تحير الناس عندما يلتقون بها لأول مرة. فالبعض لا يقبلها أبدًا. ومع ذلك، فهي نتيجة بسيطة لمبدأ أن الأعداد السالبة يجب أن تخضع لنفس القواعد الحسابية مثل تلك الموجبة. يبدو هذا معقولًا، لكنه يعني ضِمنًا أن «الأعداد السالبة ليست لها جذور تربيعية». على سبيل المثال، العدد −٢٥ ليس له جذر تربيعي. يبدو هذا غير عادل، بالنظر إلى أن نظيره +٢٥ لديه جذران تربيعيان. لذلك افترض علماء الرياضيات وجود عالم جديد من الأعداد، فيه الأعداد السالبة لها جذور تربيعية. كما افترضوا ضمنيًّا أنه في هذا العالم الموسَّع، تستمر القواعد المعتادة للحساب والجبر في التطبيق. ثم أصبح من الواضح أن هناك حاجة إلى عدد واحد جديد على نحو جوهري؛ وهو الجذر التربيعي لسالب واحد. ومنح هذا الشيء بالغ الحداثة الرمز i الذي يستخدمه الآن الجميع باستثناء المهندسين (إنهم يستخدمون j)، وسِمَته الرئيسية هي

$$i^2 = -1$$

والآن يسود الإنصاف، وأصبح لكل عدد، موجب أو سالب، جذران تربيعيان.[1] باستثناء ٠؛ لأن −٠ يساوي +٠، لكن الصفر غالبًا ما يكون استثنائيًّا، لذلك لا أحد يقلق بشأن ذلك.[2]

يمكن إرجاع فكرة أن العدد السالب قد يصبح له جذر تربيعي معقول إلى عالم الرياضيات والمهندس الإغريقي هيرون الإسكندري، ولكن الخطوات الأولى نحو فهم هذه الفكرة قد اتُّخذت بعد ألف وخمسمائة عام في عصر النهضة بإيطاليا. حيث ذكر جيرولامو كاردانو الاحتمال في كتابه «الفن الكبير» (الذي يُعد أحد أوائل كتب الجبر) في عام ١٥٤٥، لكنه استبعد الفكرة باعتبارها لا طائل من ورائها. ثم حدث تطوُّر مثير في عام ١٥٧٢، عندما كتب عالم الجبر الإيطالي رافائيل بومبيلي قواعد لإجراء العمليات الحسابية بجذر تربيعي افتراضي للعدد سالب واحد، ووجد حلولًا بأعداد حقيقية لمعادلة تكعيبية باستخدام صيغة جمعت «عددين» معًا من غير الممكن أن يكونا عددين حقيقيين. ألغى العددان المستحيلان أحدهما الآخر بشكل ملائم، تاركَين الإجابة الصحيحة؛ والحقيقية. هذه القطعة الجريئة من الحيل الغامضة لفتت انتباه علماء الرياضيات؛ لأنه يمكن التحقق من هذه الحلول مباشرة، وقد كانت صحيحة.

ومن أجل تقبُّل الأمر على نحو أسهل، قيل إن الأعداد الجديدة «تخيلية»، على عكس الأعداد «الحقيقية» التقليدية التي يمكن استخدامها لقياس الأشياء الحقيقية. وقد منحت

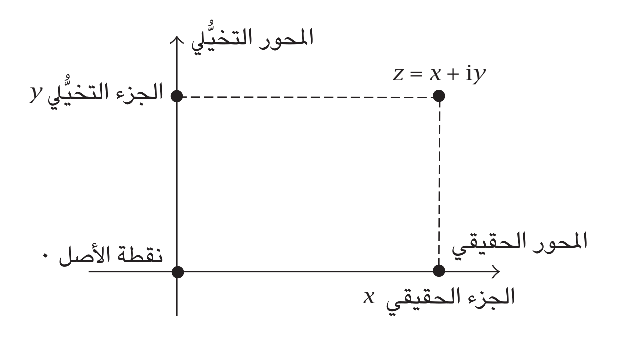
طريقة التسمية هذه للأعداد الحقيقية مكانةً خاصة غير مستحقة، وأدت إلى الخلط بين مفهوم رياضي وطريقة قياسية لاستخدامه. كما سنرى، فإن للأعداد التخيلية استخدامات وتفسيرات منطقية تمامًا، ولكن ليس كقياسات للكميات الفيزيائية القياسية، مثل الطول أو الكتلة. كان بومبيلي أول شخص يثبت أن الأعداد التخيلية — التي قد تبدو طبيعتها محيرة — يمكن استخدامها لحل مشاكل حقيقية تمامًا. كان الأمر كما لو أن أداة نجَّارٍ غريبة، لم تكن موجودة أصلًا، يمكن بطريقة ما التقاطها واستخدامها لصنع كرسي عادي تمامًا. بالطبع، كانت أداة مفاهيمية، لكن مع ذلك، كان الإجراء محيرًا. وما كان محيرًا على نحو أكبر هو الدليل على فاعليتها.

وعلى نحو إعجازي، استمرت في النجاح، في نطاق دائم الاتساع من التطبيقات. وبحلول القرن الثامن عشر، كان علماء الرياضيات يستخدمون هذه الأعداد الجديدة بحُرية. حيث قدَّم أويلر الرمز القياسي i كجذر تربيعي للعدد سالب واحد في عام ١٧٧٧. أدى الجمع بين الأعداد الحقيقية والتخيُّلية إلى وجود نظام جميل وذاتي الاتِّساق يُعرف باسم الأعداد المركَّبة؛ مركبة هنا بمعنى «مكونة من عدة أجزاء»، وليس «معقدة». وتبدو صيغتها الجبرية كالتالي: $a + b\mathrm{i}$، حيث a وb عددان حقيقيان. يمكنك جمعها وطرحها وضربها وقسمتها وأخذ الجذور التربيعية والجذور التكعيبية لها وما إلى ذلك، دون ترك نظام الأعداد المركبة.

يتمثَّل العيب الرئيسي لها في أنه من الصعب العثور على تفسير لها في العالم الحقيقي، أو، على الأقل، هذا ما اعتقده الجميع في ذلك الوقت. ليس من الواضح كيف يبدو قياس يساوي $3 + 2\mathrm{i}$، على سبيل المثال. احتدمت المناقشات شِبه الفلسفية حول شرعية الأعداد المركبة، حتى اكتشف علماء الرياضيات كيفية استخدامها لحل مسائل في الفيزياء الرياضية. ونظرًا لأنه كان يمكن التحقق من الحلول بوسائل أخرى، ويبدو دائمًا أنها صحيحة، فقد أُهملت النقاشات وسط الاندفاع نحو استغلال هذه الأدوات الجديدة الفعَّالة.

لمدة طويلة، حاول علماء الرياضيات تبرير الأعداد التخيلية من خلال اللجوء إلى «مبدأ الاتِّساق» وهو قاعدة حاسمة، لكنها غامضة، والذي يدَّعي على نحو أساسي أن أي قاعدة جبرية تصلح في الأعداد الحقيقية يجب أن تصلح تلقائيًّا في الأعداد المركبة أيضًا. وفي انتصار للأمل على المنطق، كان الدليل الرئيسي على هذا الادعاء هو أنه، عند التطبيق

العملي، كان يُعطي استخدام الأعداد المركبة إجابات صحيحة. باختصار، لقد نجحت بسبب فاعليتها، والدليل على صحتها هو أداؤها.



مستوى العدد المركب.

فقط بعد وقت طويل تمكن علماء الرياضيات من تحديد كيفية تمثيل الأعداد المركبة. في الواقع، تمامًا كما هو الحال مع الأعداد السالبة، إن لها عدة تفسيرات واقعية مختلفة. سنرى بعد قليل أنه في الهندسة الكهربائية، يدمج العدد المركب مقدار الإشارة المتذبذِبة (أي الحجم الأقصى لها) مع طورها، في حِزمةٍ واحدة مدمَجة وملائمة. يحدث الشيء نفسه في ميكانيكا الكم. وعلى نحو أكثر واقعية، مثلما تمثل الأعداد الحقيقية على هيئة نقاط على خط ما، فإن الأعداد المركبة تُمثَّل على هيئة نقاط في مستوًى ما. إن الفكرة بهذه البساطة. وكما هو الحال مع العديد من الأفكار البسيطة، جرى تجاهلها لعدة قرون.

يمكن ملاحظة أول مَلمَح لهذا التطور السريع في عام ١٦٨٥ في كتاب «الجبر» لجون واليس. لقد وسع التمثيل القياسي للأعداد الحقيقية على شكل خط ليضم الأعداد المركبة. افترض أن العدد هو $a + b$i. إن «الجزء الحقيقي» a هو مجرد عدد حقيقي قياسي، لذا يمكننا تحديد موقعه على الخط الحقيقي المعتاد، الذي يمكن اعتباره خطًّا ثابتًا في مستوًى ما. المكون المتبقي bi هو عدد تخيلي، لذلك لا يتطابق مع أي نقطة على هذا الخط. ومع ذلك، فإن المعامل b حقيقي؛ لذا يمكننا رسم خط طوله b في ذلك المستوى، بزاوية قائمة على الخط الحقيقي. تمثل النقطة في المستوى التي جرى الحصول عليها بهذه الطريقة $a + b$i. نرى اليوم على الفور أن هذا يمثل ذلك العدد كنقطة في المستوى ذي الإحداثيين

(a, b)، ولكن في ذلك الوقت لم يلقَ اقتراح واليس قبولًا. يعود الفضل التاريخي عادةً في توضيح ذلك إلى جان-روبير أرجان، الذي نشر هذا في عام ١٨٠٦، لكنَّ مسَّاحًا دنماركيًّا غير معروف، اسمه كاسبار فيسيل، كان قد سبقه في نشر الفكرة عام ١٧٩٧. لكن كانت الورقة البحثية الخاصة بفيسيل باللغة الدنماركية، ولم تدخل إلى دائرة الضوء إلا بعد أن ظهرت لها ترجمة فرنسية بعد قرن من الزمان. وقدم كلاهما تركيبات هندسية على النمط الإقليدي توضح كيفية جمع وضرب أيِّ عددين مركبين.

وفي النهاية، في عام ١٨٣٧، أشار عالم الرياضيات الأيرلندي ويليام روان هاميلتون بوضوح إلى أنه يمكنك تمثيل عدد مركب كزوج من الأعداد الحقيقية؛ على هيئة إحداثيَّي نقطة في المستوى:

العدد المركب = (العدد الحقيقي الأول، العدد الحقيقي الثاني)

ثم أعاد كتابة التركيبات الهندسية كصيغتين لجمع هذه الأزواج وضربها. سأعرضهما لكم هنا لأنهما بسيطتان وأنيقتان للغاية:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

قد يبدو هذا غامضًا بعض الشيء، لكنه يؤدي المهمة بشكل جميل. تتصرف الأعداد التي على شكل $(a, 0)$ تمامًا مثل الأعداد الحقيقية، والعدد الغامض i هو الزوج $(0, 1)$؛ هذا هو اقتراح واليس بأن الأعداد التخيلية تصنع زوايا قائمة مع الأعداد الحقيقية، ويُعبَّر عنها عن طريق الإحداثيات. وتخبرنا صيغتا هاميلتون أن

$$\mathrm{i}^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0)$$

الذي حددناه بالفعل بالعدد الحقيقي −١. هكذا، تم إنجاز المهمة. بطبيعة الحال، اتَّضح بعد ذلك أن جاوس قد ذكر الفكرة نفسها في رسالة إلى فولفجانج بوياي في عام ١٨٣١، لكنه لم ينشرها.

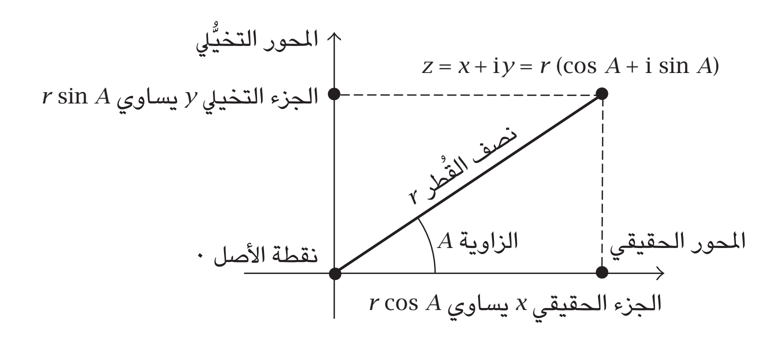
ربما أن ما لم يقدره جاوس تمامًا، لكن هاميلتون فعل، هو أن هاتين الصيغتين تسمحان لنا أيضًا بإثبات أن الأعداد المركبة تخضع لجميع قواعد الجبر المعتادة، التي كانت مرتبطة سابقًا بالأعداد الحقيقية فقط. إنها القواعد التي من أمثلتها قانون الإبدال

$xy = yx$، وقانون التجميع $(xy)z = x(yz)$، والتي يعتبرها معظمُنا من المسلَّمات عندما نتعرف على الجبر لأول مرة. لإثبات أنها تنطبق أيضًا على الأعداد المركبة، استبدل بالرموز أزواجًا من الأعداد الحقيقية، وطبق صيغتَي هاميلتون، وتحقق من أن كلا الجانبين يعطيان الزوج نفسه باستخدام القواعد الجبرية التي تتبعها الأعداد الحقيقية. إنه أمر سهل للغاية. ومن المفارقات أنه بحلول الوقت الذي توصل فيه جاوس وهاميلتون إلى المنطق الأساسي للفكرة على هيئة أزواج من الأعداد «الحقيقية» المعتادة، كان علماء الرياضيات قد استفادوا كثيرًا من الأعداد المركبة؛ لدرجة أنهم فقدوا اهتمامهم بإعطائها معنًى منطقيًّا محددًا.

كان من بين أهم هذه الاستخدامات مسائل في الفيزياء، مثل المجالات المغناطيسية والكهربائية، والجاذبية، وتدفُّق الموائع. ومن اللافت للنظر أن بعض المعادلات الأساسية للتحليل المركب (حساب التفاضل والتكامل مع الدوال المركبة) كانت مطابقة على نحو دقيق للمعادلات القياسية للفيزياء الرياضية. لذا يمكننا حل المعادلات الفيزيائية عن طريق استخدام حساب التفاضل والتكامل مع أعداد مركبة. كان القيد الرئيسي هو أن الأعداد المركبة تقع في مستوًى. لذلك كان يجب أن تعمل الفيزياء أيضًا في مستوًى، أو أن تكون مكافئة لمسألة ما في مستوًى.

تعطي الأعداد المركبة المستوى تركيبًا جبريًّا منهجيًّا يتواءم على نحو جيد مع الهندسة، ومن ثَم أيضًا مع الحركة. يمكننا اعتبار بقية هذا الفصل بمنزلة تمهيد لمفاهيم مماثلة في الهندسة الثلاثية الأبعاد، التي هي موضوع الفصل التالي. ستكون هناك بعض الصيغ — فهذا جبر، في نهاية المطاف — لكنني لست أدري كيف أتجنبها دون أن يبدو كل شيء غامضًا إلى حد ما.

عندما نمثل عددًا مركبًا z بالصيغة $z = x + \mathrm{i}y$، حيث x وy عددان حقيقيان، فإن المفهوم الهندسي الأساسي ذا الصلة هو نظام الإحداثيات الكارتيزية، المسمَّى على اسم رينيه ديكارت، الذي هو عبارة عن محورين عموديَّين أحدهما على الآخر؛ الجزء الحقيقي x (المحور الأفقي) والجزء التخيلي y (المحور الرأسي). ومع ذلك، هناك نظام إحداثيات مهم آخر في المستوى، يُسمَّى الإحداثيات القطبية، وهو يمثل نقطةً ما كزوج (r, A) حيث r عدد حقيقي موجب وA زاوية. يرتبط هذان النظامان ارتباطًا وثيقًا: حيث r هي المسافة من نقطة الأصل ٠ إلى z، وA هي الزاوية بين المحور الحقيقي والخط الذي يربط نقطة الأصل بالعدد z.



هندسة الإحداثيات الكارتيزية والقطبية للمستوى المركب. هنا cos وsin هما الدالَّتان المثلثيَّتان، جيب التمام والجيب. (يحدد الشكل هاتين الدالتين بشكل فعَّال.)

تعتبر الإحداثيات الكارتيزية مثالية لوصف كيفية انتقال العناصر دون تدوير. إذا أُزيحت نقطة $x + \mathrm{i}y$ أفقيًّا بمقدار a وحدة، وعموديًّا بمقدار b وحدة، فإنها تنتقل إلى $(x + \mathrm{i}y) + (a + \mathrm{i}b)$. إذا وسعنا هذه الفكرة إلى مجموعة من النقاط، مع وجود قائمة من القيم لـ x وy، فإن المجموعة بأكملها تنتقل أفقيًّا بمقدار a وحدة، وعموديًّا بمقدار b وحدة، إذا أضفنا عددًا مركبًا ثابتًا $a + \mathrm{i}b$ لكل نقطة في المجموعة. علاوة على ذلك، هذه الحركة تكون «متماسكة»؛ حيث يتحرك العنصر بأكمله دون أن يتغير شكله أو حجمه.

نوع آخر مهم من الحركة المتماسكة هو التدوير. مرة أخرى، لا يغير العنصر شكله أو حجمه، ولكن اتجاهه يتغير، وهو يدور بزاوية ما حول نقطة مركزيةٍ ما. الملاحظة الرئيسية هنا هي أن الضرب في i يؤدي إلى دوران النقاط بزاوية قائمة، حول مركز عند نقطة الأصل. هذا هو السبب في أن المحور y، الذي يمثل «الجزء التخيُّلي» y من العدد z، يصنع زاوية قائمة مع المحور x، والذي يمثل «الجزء الحقيقي» x. (وعلى الرغم من الاسم، فإن الجزء التخيلي هو عدد حقيقي؛ إنه «يصبح» تخيليًّا عندما نضربه في i لنحصل على $\mathrm{i}y$.)

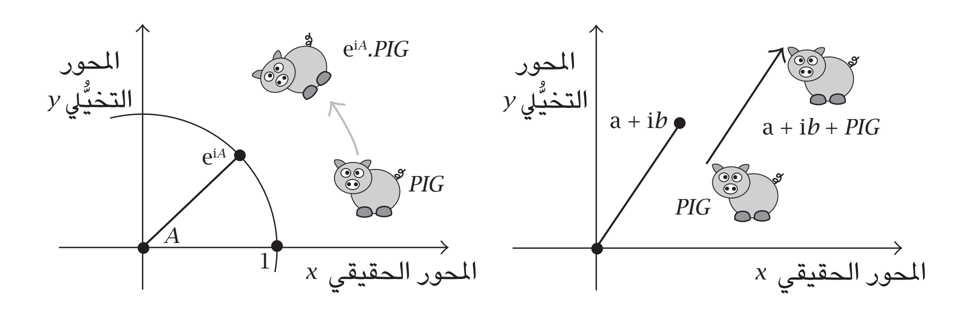
إذا أردنا تدوير مجموعة من النقاط بزاوية قائمة، فإننا نضرب كل نقطة في المجموعة في i. وبشكل عام، إذا أردنا تدوير مجموعة من النقاط بزاوية ما A، فإن علم حساب المثلثات يخبرنا بأنه يتعين علينا ضربها جميعًا في العدد المركب

$$\cos A + \mathrm{i} \sin A$$

اكتشَفَ أويلر علاقة مهمة وجميلة بين هذا التعبير والنظير المركب للدالَّة الأُسِّية e^x، حيث e تساوي ٢٫٧١٨٢٨ ... الذي هو أساس اللوغاريتم الطبيعي. يمكننا تعريف الدالة الأسية e^z لعدد مركب z بحيث يصبح لها الخصائص الأساسية نفسها مثل الدالة الأُسية الحقيقية، وتتفق معها عندما يكون z عددًا حقيقيًّا. وقد تبين أن

$$e^{iA} = \cos A + i \sin A$$

إحدى الطُّرق الرائعة لمعرفة سبب حدوث ذلك هي استخدام المعادلات التفاضلية: لقد أوضحتها في الملاحظات[3] لأنها متخصصة للغاية.



تحريك (الرسم الأيمن) وتدوير (الرسم الأيسر) النقطة يضبط PIG باستخدام أعداد مركبة.

عند تمثيل الإحداثيات القطبية لعدد مركب، تمثل الإحداثيات النقطة كما يلي:

$$r \cos A + i \sin A = r e^{iA}$$

وهي صيغة بسيطة ومختصرة.

يتجلَّى جمال الأعداد المركبة، فيما يتعلق بالهندسة، في أن لها في الوقت نفسه نظامَي إحداثيات طبيعيَّين، الكارتيزي والقطبي. إن لتحريك عنصر ما صيغة بسيطة في الإحداثيات الكارتيزية، ولكن في الإحداثيات القطبية الأمر معقَّد. وتدوير عنصرٍ ما له صيغة بسيطة في الإحداثيات القطبية، ولكن في الإحداثيات الكارتيزية الأمر معقد. إذن

عند استخدام أعدادٍ مركبة، لديك حرية اختيار التمثيل الذي يناسب أغراضك على أفضل نحو.

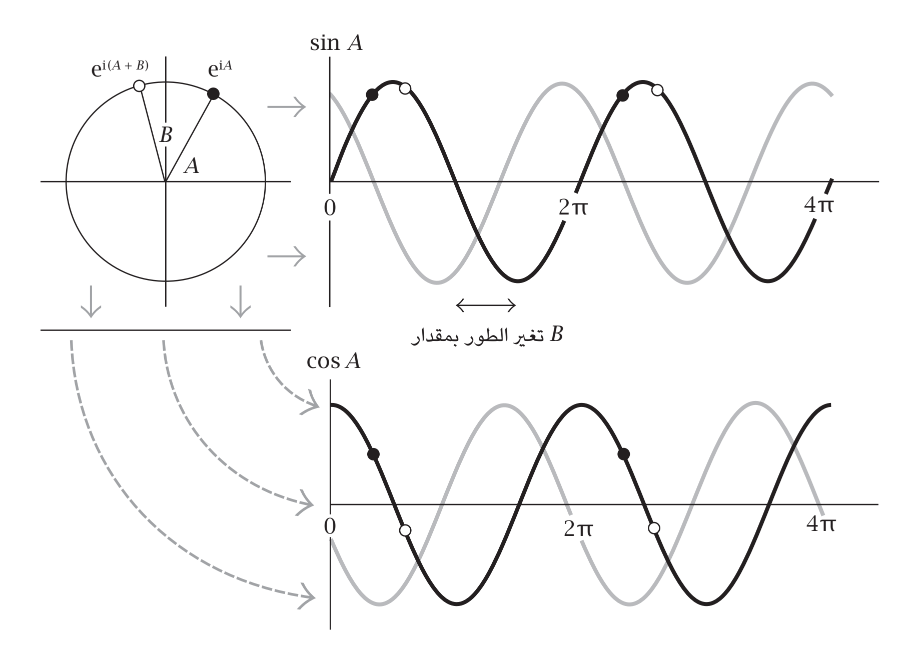
يمكن استغلال هذه الميزات الهندسية لجبر الأعداد المركبة في رسومات الكمبيوتر الثنائية الأبعاد، ولكن تبيَّن أنه نظرًا لأن المستوى بسيط ولأن أجهزة الكمبيوتر يمكنها التعامل مع الصيغ المعقدة، فلن نستفيد الكثير من خلال القيام بذلك. في الفصل السابع سنرى أنه بالنسبة لرسومات الكمبيوتر ذات الأبعاد الثلاثية، فإن حيلة مماثلة ستكون لها نتائج مذهلة. لكن في الوقت الحالي، نحتاج إلى إنهاء قصة الأعداد المركبة بمناقشة بعض التطبيقات المفيدة بحق.

أدرك علماء الرياضيات تدريجيًّا أنه على الرغم من عدم وجود تفسير مادي واضح لها، فإن الأعداد المركبة غالبًا ما تكون أبسط من الأعداد الحقيقية، وهي تلقي الضوء على سمات الأعداد الحقيقية التي تكون محيرة بخلاف ذلك. على سبيل المثال، وكما لاحظ كلٌّ من كاردانو وبومبيلي، فإن المعادلات التربيعية لها إما حلان حقيقيَّان أو لا حلول لها، وللمعادلات التكعيبية إما حل حقيقي واحد أو ثلاثة. لكن الأمر أبسط بكثير بالنسبة للحلول المركبة؛ فالمعادلات التربيعية دائمًا لها حلان مركبان، والمعادلات التكعيبية دائمًا لها ثلاثة. علاوة على ذلك، فإن معادلات الدرجة العاشرة لها عشرة حلول مركبة، ولكن قد يصبح لها من الحلول الحقيقية ما يصل إلى ١٠ أو ٨ أو ٦ أو ٤ أو ٢، أو لا تكون لها حلول على الإطلاق. في عام ١٧٩٩، أثبت جاوس حقيقة ظلت مشكوكًا في صحتها لفترة طويلة، وقد خمنها بول روث منذ عام ١٦٠٨، وأصبحت تُعرف باسم المبرهَنَة الأساسية للجبر؛ وهي معادلة متعددة الحدود من الدرجة n لها حلول مركبة عددها n. إن جميع دوال التحليل القياسية، مثل الدالة الأسية ودالة الجيب ودالة جيب التمام وما إلى ذلك، لها نظائر مركبة طبيعية، وتصبح خصائصها بشكل عام أبسط عندما نراها من منظور مركب.

إحدى النتائج العملية هي أن الأعداد المركبة أصبحت أداة قياسية في مجال الهندسة الإلكترونية، ويرجع ذلك بشكل أساسي إلى أنها توفر طريقة رائعة وبسيطة للتعامل مع التيارات المترددة. فالكهرباء عبارة عن فيض من الإلكترونات، وهي جسيمات دون ذَرِّية مشحونة. في التيار المباشر، الذي يُنتج على سبيل المثال بواسطة بطارية، تَسري جميع الإلكترونات في الاتجاه نفسه. أما في التيار المتردد، المستخدم على نطاق واسع في الكهرباء

الخدمية، لأنه أكثر أمانًا، تتحرك الإلكترونات ذهابًا وإيابًا. ويبدو الرسم البياني للجهد (والتيار) مثل منحنى جيب التَّمام في علم حساب المثلثات.

وهناك طريقة بسيطة لرسم هذا المنحنى تظهر إذا تَخيلتَ نقطة على حافة عجلة دوارة. لنفترض أن نصف قُطر العجلة يساوي ١، من أجل التبسيط. إذا نظرت إلى المسقط الأفقي للنقطة الدوارة، فستجدها تتحرك من جانب إلى آخر، وتصل إلى القيمتين +١ و−١ في أقصى حدودها. إذا كانت العجلة تدور بسرعة ثابتة، فإن الرسم البياني لهذه المسافة الأفقية يكون منحنى جيب تمام، والرسم البياني للمسافة الرأسية يكون منحنى جيب (المنحنيات السوداء في الشكل التالي).



الدوران المسقط في المستوى المركب يؤدي إلى تذبذُبات دورية. وتؤدي إضافة B إلى الزاوية A إلى تحريك الرسوم البيانية إلى اليسار: تغير الطور.

إن موضع النقطة المتحركة هو زوج الأعداد الحقيقية $(\cos A,\ \sin A)$ حيث A هي الزاوية بين النقطة والمحور الأفقي. وباستخدام حيلة هاميلتون يمكننا تأويل ذلك

باعتباره العدد المركب $\cos A + \mathrm{i} \sin A$. ومع تغير A، يتحرك هذا العدد دائريًّا حول دائرة الوحدة في المستوى المركب. إذا قِسنا الزوايا بوحدة الراديان، فهي تشكل دائرة كاملة عندما تزيد A من ٠ إلى 2π. ثم تشكل دائرة أخرى عندما تزداد A من 2π إلى 4π، وهكذا، ومن ثَم فإن الحركة تكون دورية مع زيادة A بمقدار 2π.

تشير صيغة أويلر ضمنيًّا إلى أنه بينما تأخذ قيمة A أعدادًا حقيقية، فإن القيمة المقابلة $e^{\mathrm{i}A}$ تدور وتدور حول دائرة الوحدة بسرعة ثابتة. توفر هذه الصلة طريقة لتحويل أي بيانٍ حول دالة تذبذُب على شكل دالة جيب أو جيب تمام إلى دالة أُسِّية مركبة. رياضيًّا، إن الدالة الأسية أبسط وأسهل في التعامل معها. علاوة على ذلك، فإن الزاوية A لها تفسير مادي طبيعي وهو طور التذبذُب، وهو يعني أن تغيير A بإضافة زاوية ثابتة B يؤدي إلى إزاحة مُنحنيات الجيب وجيب التَّمام بالمقدار المقابل (المنحنيات الرمادية في الشكل السابق).

والأفضل من ذلك أن المعادلات التفاضلية الأساسية للجهود والتيارات في الدوائر الكهربية تمتد دون تغيير إلى المعادلات المركبة المقابلة. ويصبح التذبذُب المادي هو الجزء الحقيقي من دالة أُسية مركبة، وتنطبق الأساليب نفسها على التيار المتردد وكذلك على التيار المباشر. يبدو الأمر كما لو أن السلوك الحقيقي له رفيق تخيُّلي سِري، والاثنان معًا أبسط من أي منهما بمفرده. يستخدم مهندسو الإلكترونيات هذه الحيلة الرياضية بشكل روتيني لتبسيط حساباتهم، حتى عند استخدام الكمبيوتر.

في هذا التطبيق على الإلكترونيات، تُخرَج الأعداد المركبة مثل أرنب رياضي من قُبَّعة المشعوذ، الأمر الذي تصادف أنه يجعل الحياة أبسط للمهندسين. ولكن هناك سياقًا رائعًا تصبح فيه الأعداد المركبة ضرورية للغاية ولها معنى مادِّي. وهو، على وجه التحديد، ميكانيكا الكم.

لقد جعل فيجنر هذا المثال على الفعالية اللامعقولة محور محاضرته:

> دعونا لا ننسى أن فراغ ميكانيكا الكم الخاص بهيلبرت هو فراغ هيلبرت المركب ... بالتأكيد بالنسبة للعقل غير المشغول، فإن الأعداد المركبة بعيدة كل البعد عن كونها طبيعية أو بسيطة ولا يمكن أن تنتج عن الملاحظات المادية. علاوة على ذلك، فإن استخدام الأعداد المركبة في هذه الحالة ليس حيلة حسابية للرياضيات التطبيقية، ولكنه يقترب من كونه ضرورة في صياغة قوانين ميكانيكا الكم.

كما بذل قصارى جهده للتأكيد على ما كان يقصده بكلمة «اللامعقولة»:

> لا شيء في خبرتنا يشير إلى وجود هذه الكميات. في الواقع، إذا طُلب من عالم رياضيات أن يبرر اهتمامه بالأعداد المركبة، فسوف يشير، ببعض السخط، إلى المبرهَنَات الجميلة العديدة في نظرية المعادلات ومتسلسلات القُوى والدوال التحليلية بشكل عام، التي تدين بوجودها إلى تقديم الأعداد المركبة ... من الصعب تجنب الانطباع بأن معجزة تواجهنا هنا، والتي يمكن مقارنتها إلى حد كبير ... بمعجزتَي وجود قوانين الطبيعة وقُدرة العقل البشري على تخمينها.

لقد ظهرت ميكانيكا الكم حوالي عام ١٩٠٠ لشرح السلوك الغريب للمادة داخل نطاقها الدقيق للغاية، الذي كان قد بدأ علماء الفيزياء التجريبية في اكتشافه، ثم تطورت بسرعة لتصبح أنجح نظرية فيزيائية اخترعتها البشرية حتى الآن. إذ تتصرف المادة بطرق مدهشة ومحيرة على مستوى الجزيئات والذرات، وخاصة الجُسيمات دون الذَّرِّية التي تتجمع لتكوين الذرات. إنها تتصرف بطرق مدهشة ومحيرة؛ لدرجة أنه ليس من الواضح على الإطلاق ما إذا كانت كلمة «مادة» تنطبق عليها. إن الموجات، مثل الضوء، تتصرف أحيانًا مثل الجُسيمات، التي تُسمَّى الفوتونات. وتتصرف الجسيمات، مثل الإلكترونات، أحيانًا مثل الموجات.

فُسرت ازدواجية الموجة والجُسيم هذه في النهاية بإدخال المعادلات الرياضية التي تحكم كلًّا من الموجات والجسيمات، على الرغم من أن الكثير لا يزال محيرًا حتى الآن. في هذه العملية، خضعت الطريقة التي يُمثل كلاهما في الرياضيات، بحسب تعبير شكسبير، إلى «تغيير جذري. إلى شيء غني وغريب». حتى ذلك الوقت، كان الفيزيائيون يصفون حالة جسيم المادة من خلال قائمة صغيرة من الأعداد: الكتلة، والحجم، والموضع، والسرعة، والشحنة الكهربائية، وما إلى ذلك. في ميكانيكا الكم، توصف حالة أي نظام باستخدام موجة؛ بتعبير أدق، دالته الموجية. وكما يوحي الاسم، هذه دالة رياضية لها خصائص شبيهة بخصائص الموجة.

إن الدالة هي قاعدة أو عملية رياضية تحول عددًا ما إلى عدد آخر بطريقة محددة. بشكل عام، يمكن للدالة تحويل قائمة من الأعداد إلى عدد واحد، أو حتى قائمة أخرى من الأعداد. علاوة على ذلك، يمكن ألَّا تعمل الدالة على الأعداد فقط، ولكن أيضًا على مجموعات من العناصر الرياضية من أي نوع. على سبيل المثال، تعمل دالة «المساحة» على مجموعة

كل المثلثات، وعندما تطبقها على أي مثلث محدد، فإن ناتج الدالة يكون مساحة ذلك المثلث.

تعمل الدالة الموجية لأي نظام كمي على قائمة القياسات الممكنة التي قد نُجريها على النظام، مثل إحداثيات الموقع أو إحداثيات السرعة. في الميكانيكا الكلاسيكية، يحدد عدد متناهٍ من هذه الأعداد حالة النظام، ولكن في ميكانيكا الكم، قد تتضمن هذه القائمة عددًا لا متناهيًا من المتغيرات. إن هذه مأخوذة مما يُسمى فراغ هيلبرت، الذي هو (في الغالب) فراغ غير منتهي الأبعاد لديه مفهوم معرف جيدًا للمسافة بين أي اثنين من أعضائه.[4] وناتج الدالة الموجية هو عدد واحد لكل دالة في فراغ هيلبرت، لكن العدد الذي تنتجه لا يكون عددًا حقيقيًّا: إنه عدد مركب.

في الميكانيكا الكلاسيكية، إن أي كمية قابلة للملاحظة (أي، يمكننا قياسها) تقرن عددًا بكل حالة ممكنة للنظام. على سبيل المثال، عندما نلاحظ المسافة بين الأرض والقمر، نتوصل إلى عدد معين، وهذه دالة حُددت بِناءً على جميع الأوضاع الممكنة التي قد تتخذها الأرض والقمر نظريًّا. في ميكانيكا الكم، الكميات التي يمكن ملاحظتها تكون «مؤثرات». حيث يأخذ المؤثر عنصرًا من فراغ حالات هيلبرت ويحوله إلى عدد مركب. يجب أن تخضع المؤثرات لقائمة قصيرة من القواعد الرياضية. أحدها هو الخطية. لنفترض أن لدينا الحالتين x وy، وأن المؤثر L يعطي الناتجين $L(x)$ و$L(y)$. في نظرية الكم، يمكن للحالات أن تتراكب — تُجمع معًا — لتعطي $x + y$. والخطية تعني أن المؤثر L يجب حينها أن يعطي الناتج $L(x) + L(y)$. وعند تحقق القائمة الكاملة للخصائص المطلوبة في مؤثرٍ ما فإنه يُطلَق عليه مؤثر هرميتي، وهو يعمل على نحو جيد فيما يخص المسافات في فراغ هيلبرت.

يختار الفيزيائيون هذه الفراغات والمؤثرات بطرقٍ مختلفة لنمذجة أنظمة كمية محددة. إذا كانوا مهتمين بحالات الموضع والزخم لجُسيمٍ ما، فإن فراغ هيلبرت يتكون من جميع الدوال «القابلة للتكامل تربيعيًّا»، التي هي غير منتهية الأبعاد. وإذا كانوا مهتمين بدوران إلكترون ما، فإن فراغ هيلبرت يصبح ثنائي الأبعاد، ويتكون مما يُسمَّى «سبينورات». مثال على ذلك هو معادلة شرودنجر، التي تبدو كالتالي:

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\Psi(t)\rangle = \hat{H}|(t)\rangle$$

لستم بحاجة إلى فهم الجوانب الرياضية المتضمَّنة هنا، ولكن دعونا نلقِ نظرة على الرموز. لننظر على وجه الخصوص إلى الرمز الأول، الذي يكشف الكثير من الأمور: إنه i، الجذر

التربيعي لسالب واحد. نحن ننظر إلى المعادلة الأساسية لميكانيكا الكم، والرمز الأول الذي نراه هو العدد التخيلي i.

والرمز التالي، $\hbar$، هو عدد يُسمى ثابت بلانك المختزل، وهو صغير للغاية؛ حوالي 10^{-34} جول ثانية. إنه ما يمنح ميكانيكا الكم الكُموم الخاصة بها، وهي قفزات صغيرة للغاية، ولكنها متقطعة في الأحجام التي يمكن أن تفترضها الكميات المختلفة. ثم هناك الكسر $\frac{d}{dt}$. إن t هو الزمن، ورمزا d يخبرانا بأن نجد معدَّل التغير، كما هو الحال في حساب التفاضل والتكامل، لذلك فهي معادلة تفاضلية. إن مجموعة الرموز $|\Psi(t)\rangle$ هي الدالَّة المَوجية، التي تحدد الحالة الكمية للنظام عند الزمن t، لذلك هذا هو الشيء الذي نريد معرفة معدل تغيُّره. وأخيرًا، $\hat{H}$ هو ما يُطلَق عليه مؤثر هاميلتون؛ وهو، في الأساس، يعبر عن الطاقة.

إن التفسير المعتاد للدالة المَوجية هو أنها لا تمثل أي حالة فردية، ولكن «احتمال» أن الملاحظة ستجد النظام في تلك الحالة. ومع ذلك، فإن الاحتمالات هي أعداد حقيقية بين ٠ و١، في حين أن مخرجات الدالة الموجية هي أعداد مركبة من أي حجم. لذلك يركز الفيزيائيون على مقدار (أو ما يُسمِّيه علماء الرياضيات مقياسَ) العدد المركب، وهو مدى بُعده من نقطة الأصل، الذي يُرمز له بـ r في الإحداثيات القطبية. إنهم يعتقدون أن هذا العدد هو احتمال نسبي، لذلك إذا كانت إحدى الحالات لها مقدار ١٠ وأخرى لها مقدار ٢٠، فإن احتمال الثانية هو ضعف احتمال الأولى.

يخبرنا المقياس بمدى بُعد العدد المركَّب عن نقطة الأصل، لكنه لا يخبرنا بالاتجاه الذي علينا أن نسلكه للوصول إليه. هذا الاتجاه محدد بعدد حقيقي آخَر، وهو الزاوية A في الإحداثيات القطبية. يطلق علماء الرياضيات على هذه الزاوية سعة العدد المركب، لكن الفيزيائيين يسمونها الطَّور؛ أي إلى أي مدًى يجب أن تسير حول دائرة الوحدة. لذا فإن الدالة المَوجية المركبة لها مقدار، وهو يحدد الاحتمال النسبي لحدوث تلك الملاحظة، ولها طور، وهو لا يغير المقدار ويكاد يكون من المستحيل قياسه. تؤثر الأطوار على كيفية تراكب الحالات، ومن ثَم أيضًا احتمالات حدوث تلك الحالات المتراكبة، ولكنها في الواقع العملي مخفية عن الرؤية التجريبية.

ما يعنيه كل هذا هو أن عددًا حقيقيًّا واحدًا ليس النوع المناسب من الأعداد لوصف الحالة الكمية. ونحن لا يمكننا حتى التعبير عن ميكانيكا الكم باستخدام الأعداد الحقيقية التقليدية.

إذا كان السؤال هو: «ما الاستخدامات العملية للأعداد المركَّبة؟» فيمكننا أن نشير إلى جميع التطبيقات المتنوعة لميكانيكا الكم، واثقين في أنها لا بد أن تكون أيضًا تطبيقاتٍ للأعداد المركبة. حتى وقت قريب، كان معظم الإجابات سيدور حول التجارب المعملية؛ الفيزياء الحديثة، ولكن ليس نوع الأشياء التي تجدها في مطبخك أو غرفة المعيشة. لقد غيرت الإلكترونيات الحديثة كل ذلك، وأصبح العديد من أجهزتنا المفضلة يعمل وفق أسس ميكانيكا الكم. يحتاج المهندسون إلى فهم مثل هذه الأشياء بعُمق وتفصيل كبيرين، ولكننا يمكننا الاكتفاء بالجلوس والإعجاب بإبداعاتهم. أو، من وقت لآخر، نهاجمها عندما تفشل في فعل ما نريد بسبب بعض الجوانب الفنية الغامضة في تركيبها.

إن كابل شبكة الألياف الضوئية الواسعة النطاق المركبة حديثًا في منطقتنا هو مثال على ذلك. إذ يبدو مثل الكابل التقليدي، لكنه جزء من نظام نقلٍ يعتمد بالفعل على تقنية الكم. ومع ذلك، فإن الجانب الكمي لا يوجد في الكابل في حد ذاته؛ إنه موجود في الأجهزة عبر النظام التي تنتج نبضات الضوء التي يعتمد عليها الإعداد بالكامل. بالطبع، إن الضوء في الواقع كمِّي على أي حال، لكن هذه الأجهزة «مصمَّمة» باستخدام ميكانيكا الكم، ولن تعمل بدونها.

تشير كلمة «ألياف» إلى كابل متعدد الخيوط، وخيوطه الفردية عبارة عن خيوطٍ زجاجية رفيعة تنقل الضوء. لقد صُممت بحيث ينعكس الضوء داخل جدرانها بدلًا من التسرُّب منها، ومن ثَم يمكننا ثني الكابلات عند الأركان ويبقى الضوء داخل الكابل. ويجري تحويل المعلومات في شعاع الضوء إلى سلسلة من النبضات الحادة. وقد استُخدمت صناعة الاتصالات الألياف الضوئية لأنها تجمع بين العديد من المزايا. فالألياف المتوفرة الآن شفافة للغاية، لذا فهي تنقل الضوء لمسافات طويلة دون إضعاف الإشارة. ويمكن أن تحمل نبضات الضوء معلومات أكثر بكثير من أسلاك الهاتف النحاسية التقليدية. هذا النطاق الترددُّي الأعلى هو ما يعطي «السرعة» الأكبر؛ لا يتعلق الأمر بمقدار السرعة التي تتحرك بها النبضات، بل بعدد النبضات وكمِّ المعلومات التي يمكن حشرها في خيط ألياف واحد أو كابل واحد. كما أن كابلات الألياف أخف من الكابلات النحاسية، لذا فهي أسهل في النقل والتركيب وأقل عُرضةً للتداخل الكهربائي.

يتكون نظام الاتصالات الضوئية من أربعة مكونات رئيسية: جهاز إرسال (مصدر الضوء)، وكابل لحمل الإشارة، وسلسلة من المكرِّرات التي تلتقط الإشارة قبل أن تضعُف للغاية، وتنقِّيها، ثم ترسلها، وبالطبع جهاز استقبال (كاشف). سأركز على جهاز واحد

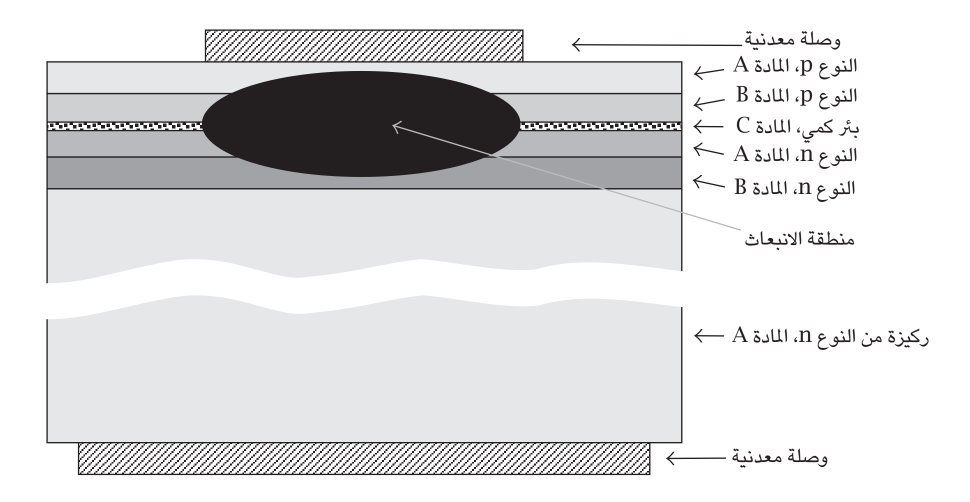
فقط، وهو جهاز الإرسال. يجب أن يكون هذا جهاز يمكنه إنشاء الضوء، ويمكن التحكم فيه بحيث ينبعث الضوء كسلسلة من النبضات المفردة، يمكن تشغيلها (١) أو إيقاف تشغيلها (٠) لتشفير رسالة وفق النظام الثنائي. يجب أن يكون التبديل بين الوضعين سريعًا للغاية، ويجب أن يكون كل شيء دقيقًا للغاية. على وجه التحديد، يجب أن يكون الطول الموجي («اللون») الخاص بالضوء ذا قيمة واحدة محددة. أخيرًا، تحتاج النبضات إلى الاحتفاظ بهيئتها، حتى يتمكن جهاز الاستقبال من التعرف عليها.

إن الجهاز المثالي (والوحيد في الواقع) لفعل هذا، هو الليزر، وهو جهاز يصدر شعاعًا قويًّا من الضوء المترابط الذي له طول مَوجي محدد. تعني كلمة «مترابط» أن جميع الموجات الموجودة في الشعاع متوافقة الطَّور، ومن ثَم لا يُلغي بعضها بعضًا. يقوم جهاز الليزر بذلك عن طريق عكس الضوء (على هيئة فوتونات) ذهابًا وإيابًا بين زوج من المرايا، مما يؤدي إلى حدوث تدفق متزايد من الفوتونات في حلقة تغذية مُرتدة موجبة. وعندما يصبح الشعاع قويًّا بدرجة كافية، يُسمح له بالتسرب.

كانت أجهزة الليزر في بداياتها ضخمة ومعقدة، لكن معظم أجهزة الليزر الخفيفة الوزن الحالية تُصنع باستخدام نفس العمليات العامة التي تُنتج الدوائر المجهرية الموجودة في «رقائق» الكمبيوتر؛ دوائر أشباه الموصلات المتكاملة. وعلى مدى الثلاثين عامًا الماضية، كانت تقريبًا جميع أنواع أجهزة الليزر المستخدمة في التكنولوجيا الموجهة للمستهلكين والشركات (مثل مشغلات أقراص البلو-راي، التي أصبحت ممكنة بسبب أجهزة الليزر التي تنتج ضوءًا أزرق)، ذات بِنى حصرٍ متعددة ومنفصلة. هذه تُعد تطويرًا لأجهزة ليزر البئر الكمية، وهي تشبه السندوتش الذي تعمل الطبقة الوسطى فيه كبئر كمية. يؤدي هذا إلى إنشاء دوال مَوجية تبدو كسلسلة من الدرجات، وليس منحنًى، ومن ثَم يجري تكميم مستويات الطاقة، لتصبح حادة ومنفصلة بدلًا من كونها ضبابية ومتداخلة. يمكن ضبط هذه المستويات، من خلال التصميم المناسب للبئر الكمية، لتوليد ضوء بالتردد المناسب لعمل جهاز الليزر.

تضيف أجهزة الليزر ذات بِنى الحصر المتعددة والمنفصلة طبقتين إضافيتين أعلى وأسفل السندوتش، مع مُعامل انكسار أقل من الطبقات الثلاثة الوسطى، مما يحصر الضوء داخل تجويف الليزر. من المنطقي أنه لا يمكنك معرفة كيفية تصنيع جهاز كمي من هذا النوع دون تطبيق الكثير من مبادئ ميكانيكا الكم. لذلك حتى الألياف الضوئية في التسعينيات من القرن الماضي كانت تستخدم بالفعل مكونات كمية، والشيء نفسه صحيح اليوم على نحو أكبر.

في المستقبل، من المحتمل أن يغير نطاقٌ كبير من الأجهزة الكمية الجديدة من نمط حياتنا. ويخبرنا مبدأ اللَّايَقين لهايزنبرج في ميكانيكا الكم أنه لا يمكن قياس بعض الكميات القابلة للملاحظة على نحو دقيق في نفس الوقت؛ على سبيل المثال، إذا كنت تعرف بالضبط موضع جسيم، فلا يمكنك التأكد من مدى سرعة تحركه. يمكن استخدام هذه الميزة لاكتشاف ما إذا كان شخص ما غير مصرَّح له يتنصَّت على رسائل سرية. فعندما تراقب إيف المتنصِّتة الحالة الكمية لإشارة مارة — لنقل دوران فوتون ما — تتغير هذه الحالة، ولا يمكنها التحكم في كيفية تغيُّرها. إن الأمر مثل جرس مدمَج في الرسالة، يرن كلما حاولَت إيف قراءتها.



الهيكل التخطيطي لجهاز ليزر ذي بِنى حصر متعددة ومنفصلة. يشير المصطلحان النوع n والنوع p، على التوالي، إلى أشباه الموصلات؛ حيث تُنقل الشحنة بواسطة الإلكترونات أو بواسطة «الثغرات»، حيث تكون الإلكترونات غير موجودة.

تتمثل إحدى طُرق تنفيذ هذه الفكرة في استخدام الفوتونيات الكمية، وهي المعنية بالخصائص الميكانيكية الكمية للفوتونات. وهناك طريقة أخرى هي التلاعب في دوران الجسيمات الكمية، وهذا هو المجال الناشئ للإلكترونيات الدورانية. يمكن لمثل هذه الأجهزة أن تنقل معلومات أكثر من الإشارات التقليدية عن طريق تشفير بيانات إضافية

في دورانات الجسيمات، وليس فقط ما إذا كانت موجودة أم لا. لذا فإن شبكة الألياف الضوئية الواسعة النطاق الفائقة السرعة في منطقتنا، قد تحل محلها قريبًا شبكة إلكترونيات دورانية واسعة النطاق متناهية السرعة، تحمل معلومات أكبر بكثير عبر الكابل نفسه. وسيبقى الأمر هكذا إلى أن يخترع أحد العباقرة تقنية تصوير هولوجرافي عالية الدقة سداسية الأبعاد تستهدف حواسَّ أخرى غير البصر، وتلتهم كل ذلك النطاق الترددي الإضافي.

الفصل السابع

أبي، هل يمكنك ضرب الثلاثيات؟

كيف صُممت أمواج المحيط وهي ترتطم على نحو هادئ بجدار قاربك في لعبة «أساسينز كريد: بلاك فلاج»؟ إنها الرياضيات.

كيف صُممت تلك الرصاصات المتطايرة فوق رأسك في لعبة «كول أوف ديوتي: جوستس»؟ إنها الرياضيات.

كيف يمكن أن يجري «سونيك» بسرعة وأن يقفز «ماريو»؟ إنها الرياضيات.

كيف يمكن الانجراف حول ذلك الركن بسرعة ٨٠ ميلًا/ساعة في لعبة «نيد فور سبيد»؟ إنها الرياضيات.

كيف يمكن التزلُّج بلوح الثلج نحو أسفل منحدر في لعبة «إس إس إكس»؟ إنها الرياضيات.

كيف يمكن أن ينطلق ذلك الصاروخ في لعبة «كيربال سبيس بروجرام»؟ إنها الرياضيات.

الموقع الإلكتروني لمجلة «فوربس»،
مقال «هذه هي الجوانب الرياضية وراء لعبة «سوبر ماريو»»

تبدو القرية مثل قرى القرون الوسطى، مع أكواخ مسقَّفة بالقش، وعربات تجرُّها الخيول على طريق تُرابي، وحقول بها محاصيل وخِراف. ويتدفق المجرى الضيق لنهرٍ بين المباني المتراصَّة، مُتلألئًا باللون الذهبي في غروب الشمس. نرى المشهد من أعلى وكأننا على متن طائرة؛ يدور الكادر ويتأرجح بينما تهبط الطائرة وتلتف. لكن هذه ليست طائرة؛ يُظهر قطع لوجهة نظر على مستوى الأرض الخطوط العريضة الواضحة لتِنِّين. إنه قادم

باتجاهنا. ثم هناك قطع وعودة إلى منظور التنين، وهو يهبط الآن على نحو شديد الانحدار، وينزلق على أسطح الأكواخ، بينما يتدفق تيار من اللهب أمامه ليشتعل القش ...

قد يكون هذا فيلمًا أو لعبة كمبيوتر؛ إذ في الوقت الحاضر يكون من الصعب التمييز بينهما. في كلتا الحالتين، يُعَد هذا انتصارًا لتقنية إنشاء الصور الرسومية باستخدام الكمبيوتر.

هل هذه التقنية قائمة على الرياضيات؟

أجل، بالتأكيد.

لا بد أنها حديثة العهد للغاية، إذن.

ليس بالضبط. إن «التطبيق» جديد، وبعض الجوانب الرياضية جديدة ومعقدة، لكن الجزء الذي أتصوره في ذهني منها يبلغ عمره نحو ١٧٥ عامًا. وهذا الجزء لم يكن مخصصًا على الإطلاق لإنشاء رسومات الكمبيوتر. إذ لم يكن هناك أي أجهزة كمبيوتر في تلك الأيام.

كان القصد منه التعامل مع مسألة أكثر عمومية، لا تتعلق بأي أجهزة؛ وهي: الهندسة في الفراغ ثلاثي الأبعاد. من منظور اليوم، إن إمكانية أن له صلة برسومات الكمبيوتر واضحة. لكن بدا أنه لا ينتمي لعلم الهندسة. لقد بدا وكأنه ينتمي لعلم الجبر. إلا أنه خالف إحدى القواعد الجبرية الأساسية، لذلك هو حتى لم يكن ينتمي إلى علم الجبر. لقد استدعاه إلى الوجود معجزة الرياضيات الأيرلندية السير ويليام روان هاميلتون، الذي أطلق على فكرته اسم «الكواترنيونات». ومن المفارقات أن الكواترنيونات لم تكن بالضبط هي الشيء الذي كان يرغب في التوصل إليه، وهناك سبب لذلك.

إن الشيء الذي كان يرغب في التوصل إليه ليس له وجود.

إن عدد أجهزة الكمبيوتر الموجودة على هذا الكوكب اليوم يفوق عدد البشر. إن عدد البشر يتجاوز ٧٫٦ مليار. في حين يوجد أكثر من مليارَي جهاز كمبيوتر محمول، وما يقرب من ٩ مليارات هاتف ذكي وجهاز لوحي، وكلاهما يتمتعان في كثير من الأحيان بقُدرة حَوسَبية أكبر من قدرة أفضل جهاز كمبيوتر فائق كان يمكن شراؤه في عام ١٩٨٠.[1] وبإحصاء أجهزة الكمبيوتر الصغيرة التي يتسابق المصنعون لاستخدامها داخل كل غسالة أطباق، ومحمصة خبز، وثلاجة، وغسالة، وبوابة قط على هذا الكوكب، فإن عدد أجهزة الكمبيوتر الآن يصل الآن لما يزيد عن أربعة أضعاف عدد البشر.

من الصعب إدراك أن الأمر لم يكن دائمًا على هذا النحو. إن وتيرة الابتكار كانت شديدة التسارُع. لقد وصل أول أجهزة الكمبيوتر المنزلية — «آبل ٢»، و«تي آر إس ٨٠»، و«كومودور بي إي تي» — إلى السوق الاستهلاكية في عام ١٩٧٧، قبل ما يزيد قليلًا عن أربعين عامًا. منذ البداية تقريبًا، كان أحد الاستخدامات الرئيسية لأجهزة الكمبيوتر المنزلية هو ممارسة الألعاب. كانت الرسومات غير متقَنة، والألعاب بسيطة للغاية. بعضها تألف فقط من رسائل نصية: «أنت في متاهة من الممرات الملتَوِية، التي كلها مختلفة». تليها رسالة أكثر تخويفًا: «أنت في متاهة من الممرات الملتوية، التي كلها متشابهة».

وبينما ازدادت سرعة أجهزة الكمبيوتر، أصبحت ذاكرتها لا نهائية تقريبًا، وانخفضت الأسعار، وأصبحت الصور التي أُنشئت بواسطة الكمبيوتر أكثر إقناعًا، لدرجة أنها بدأت في السيطرة على صناعة السينما. وكان أول فيلم رسوم متحركة طويل أُنتج بالكامل بواسطة الكمبيوتر هو «حكاية لعبة» (توي ستوري) عام ١٩٩٥، على الرغم من أن إنتاج أفلام أقصر منه بدأ قبل ذلك بعشرة أعوام. وقد أصبحت المؤثرات الخاصة الآن فائقة الواقعية، وهي مستخدمة على نطاق واسع؛ لدرجة أننا بالكاد نلاحظ وجودها في الأفلام. فعندما صور بيتر جاكسون ثلاثية «ملك الخواتم» (لورد أوف ذا رينجز)، لم يقلق بشأن الإضاءة؛ إذ جرت مراجعتها فيما بعد، ومعالجتها بواسطة أجهزة الكمبيوتر.

لقد أصبحنا معتادين على الصور الرسومية العالية الجودة والسريعة الحركة؛ لدرجة أننا نادرًا ما نتوقف لنتساءل من أين أتت جميعها. متى ظهرت أول لعبة فيديو؟ لقد ظهرت قبل ثلاثين عامًا من ظهور أجهزة الكمبيوتر المنزلية. في عام ١٩٤٧، قدم الرائدان في مجال التليفزيون توماس جولدسميث الابن وإستل راي مان طلبًا للحصول على براءة اختراع من أجل «جهاز تسلية يقوم على أنبوب أشعة كاثود». إن أنبوب أشعة الكاثود عبارة عن قنينة زجاجية سميكة قصيرة ذات قاعدة عريضة ومقوسة قليلًا — الشاشة — وعنق ضيق. يطلق جهاز في العنق شعاعًا من الإلكترونات على الشاشة، وتتحكم المغانط الكهربائية في اتجاه الشعاع، وتمسحه عبر الشاشة في سلسلة من عمليات المسح الأفقية، مثل قراءة عين بشرية لصفحة من النص. عندما يصطدم الشعاع بمقدمة الأنبوب، فإنه يتسبب في تألق طبقة خاصة، مما يُولِّد بقعة مضيئة من الضوء. وقد استخدمت معظم أجهزة التليفزيون أنابيب أشعة الكاثود لعرض الصورة، حتى ظهرت أجهزة التليفزيون ذات الشاشات المسطحة تجاريًّا في عام ١٩٩٧. لقد كانت لعبة جولدسميث ومان مستوحاة من شاشات أجهزة الرادار الخاصة بالحرب العالمية الثانية. حيث كانت تمثل بقعة الضوء صاروخًا، ويحاول اللاعب جعله يصيب أهدافًا مرسومة على ورق ملصق على الشاشة.

وبحلول عام ١٩٥٢، كان الكمبيوتر الرئيسي «إي دي إس إيه سي» قد وصل إلى قمة التطور في عالم الألعاب بتقديمه لعبة «إكس أُو» الخاصة به. ثم جاءت القفزة الهائلة على المستوى التجاري بتقديم لعبة «بونج»، وهي من أوائل الألعاب التي تعمل بالعملات المعدنية، والتي صنعتها شركة أتاري؛ وهي لعبة مبسطة ثنائية الأبعاد لتِنِس الطاولة، الكرة فيها ترتد بين مضربين، واحد لكل لاعب. وفقًا لمعايير اليوم، كانت الرسومات بدائية للغاية، فهي عبارة عن مستطيلين متحركين يُمثلان المضربين ومربع متحرك يمثل الكرة، وكانت الحيوية غير موجودة تقريبًا، ولكن حتى التوصُّل إلى تكنولوجيا أفضل، كانت لعبة «بونج» تُعد أحدث ما جرى التوصل إليه في مجال ألعاب الفيديو.

غني عن القول أن هاميلتون لم يكن ليقصد استخدام ابتكاره الرياضي بهذه الطريقة. فقد استغرقت هذه الفكرة ١٤٢ سنة أخرى لكي تظهر. لكن يمكننا أن ندرك، بتأمل الأمور الآن، أن هذا الاحتمال كان مُتأصلًا في نوع المسألة التي كان الهدف من اكتشافه المساعدة في حلها. هناك العديد من أساليب ممارسة الرياضيات. فيمكن أن يكون علماء الرياضيات ممن يسعون لحل المشكلات، ويركزون على إيجاد إجابة لمسألة معينة، سواء أكان ذلك في العالم الحقيقي أو العالم التخيُّلي للرياضيات البحتة. ويمكن أن يكونوا ممن يضعون النظريات؛ حيث ينظمون مبرهَنات خاصة لا حصر لها في إطار موحد. كما يمكن أن يكونوا مستقلين في التفكير، يتنقلون على نحو غير متوقَّع من مجال إلى آخر، ويعملون على كل ما يخطر ببالهم. أو يمكن أن يكونوا صانعي أدوات، يصممون أدوات جديدة قد تكون مفيدة عند تناول الأسئلة التي لم تُطرَح بعد؛ أي، طريقة تبحث عن تطبيق.

يعتمد الجزء الأكبر من شهرة هاميلتون على عمله كواضع للنظريات، لكن الكواترنيونات توضح براعته كصانع أدوات. إذ ابتكرها لتوفير بِنية جبرية لإجراء حسابات منهجية حول هندسة الفراغ ثلاثي الأبعاد.

وُلد هاميلتون في دبلن بأيرلندا عام ١٨٠٥، وكان ترتيبه الرابع بين إخوته التسعة. كانت والدته هي سارة هاتن وكان والده آرتشيبولد هاميلتون، وكان يعمل محاميًا. عندما كان ويليام في الثالثة من عمره، أُرسل للعيش مع عمه جيمس، الذي كان يدير مدرسة. كان لدى ويليام موهبة مبكرة في تعلم اللغات، لكن يبدو أنه علَّم نفسه قدرًا كبيرًا من الرياضيات أيضًا، وكان هذا هو المجال الذي درسه في كلية ترينيتي في دبلن من سن ١٨

عامًا، وتفوق فيه للغاية. وقد أعلن جون برينكلي، أسقف كلوين، أن «هذا الشاب، لا أقول إنه سيصبح، بل هو بالفعل، أول عالم رياضيات في مثل عمره». يمكن القول إن الأسقف كان على حق، وفي عام ١٨٣٧، بينما كان هاميلتون لا يزال طالبًا جامعيًّا، عُين أستاذَ كرسي أندروز لعلم الفلك، وكذلك عالمَ الفلك الملكي في أيرلندا. وقد أمضى ما تبقى من حياته المهنية في مرصد دانسينك بالقرب من دبلن.

وكانت أكثر أعماله شهرةً في مجال البصريات والديناميكا، وخاصة اكتشاف وجود صلة ملحوظة بين هذين المجالين المختلفَين من الفيزياء الرياضية، وقد أعاد هاميلتون صياغتها على أساس مفهوم رياضي مشترك، وهو الدالة الأساسية. إننا نسميها الآن الدالة الهاميلتونية، وقد أدت إلى تقدم كبير في كلا المجالين. وفي وقت لاحق اتضح أنها بالضبط الشيء المطلوب من أجل النظرية الحديثة والغريبة جدًّا الخاصة بميكانيكا الكم.

لقد تكلمنا عن هاميلتون على نحو مختصر في الفصل السابق. في عام ١٨٣٣ حل معضلة شبه فلسفية عمرها قرون، وجرَّد الأعداد المركبة من الغموض الذي يحيط بها، وكشف عن الاحتيال الذي يشوبها، وأن تفرُّدها البادي ناتج عن خدعة ماهرة، وأن طبيعتها الحقيقية تكاد تكون تافهة. إذ قال هاميلتون إن العدد المركب ليس أكثر من زوج مرتب من الأعداد الحقيقية، له قائمة محددة من القواعد لجمع الأزواج وضربها. وقد رأينا أيضًا أن هذا الحل الخاص باللُّغز جاء متأخرًا جدًّا بحيث لم يهتم به أي شخص، وأنه عندما جاء جاوس بالفكرة نفسها لم يكلِّف نفسه عناء نشرها. ومع ذلك، فإن طريقة هاميلتون في التفكير حول الأعداد المركبة كانت ذات قيمة كبيرة؛ لأنها ألهمته فكرة إنشاء الكواترنيونات.

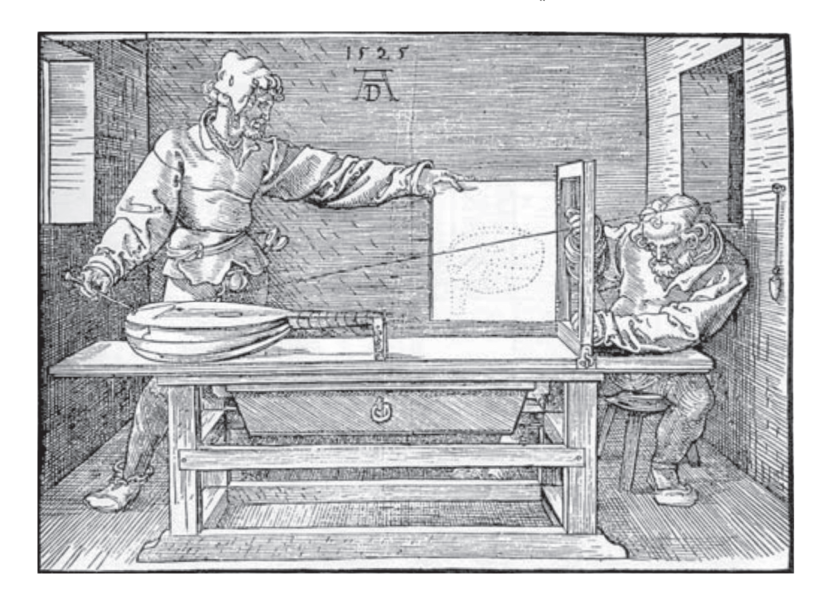
من أجل هذه الإنجازات الرياضية، وغيرها، حصل هاميلتون على لقب سير في عام ١٨٣٥. وقد توصل إلى الكواترنيونات في وقت لاحق، وعندما فعل ذلك، أدرك عدد قليل من الناس، غير هاميلتون نفسه وعدد قليل من أنصاره، أهميتَها. وأظن أنه خلال حياته نظر معظم علماء الرياضيات والفيزياء إلى ترويجه الحماسي للكواترنيونات على أنه نوع من الهَوَس؛ إنه ليس جنونًا على وجه التحديد، ولكن شيء قريب منه بشكل خطير. لكنهم كانوا مخطئين. حيث أطلق ابتكاره الجديد ثورة، قادت الرياضيات إلى منطقة جامحة مجهولة. ويمكنكم إدراك لماذا فشل معظمهم في تقدير إمكاناته، لكن هاميلتون كان يعلم أنه اكتشف شيئًا مثيرًا للاهتمام. ولا تزال منطقته الجامحة المجهولة تقدم رؤًى جديدة ورائعة إلى اليوم.

إن الأسئلة التي يهتم بها عدد قليل جدًّا من هُواة الألعاب أو رُوَّاد السينما هي: كيف تعمل الصور الرُّسومية؟ كيف تنشأ هذه الأوهام؟ وما الذي يجعلها مقنِعة للغاية؟ صحيح أننا لسنا بحاجة إلى معرفة أي شيء عن ذلك للاستمتاع بلعب اللعبة أو مشاهدة الفيلم. لكن التطور التاريخي، والتقنيات التي كان لا بد من ابتكارها لجعل ذلك ممكنًا، والشركات المتخصصة في صنع الصور الرسومية بواسطة الكمبيوتر، وكذلك كتابة شفرات الألعاب؛ تحتاج إلى الكثير من الأشخاص المدربين تدريبًا عاليًا الذين يعرفون كيف تعمل تلك الحيل المختلفة، بتفصيل فني كبير، ولديهم الإتقان والإبداع لابتكار أشياء جديدة. إنها ليست صناعة يمكنك أن ترتكن فيها على أمجادك.

إن المبادئ الهندسية الأساسية لهذا المجال كانت موجودة منذ نحو ٦٠٠ عام على الأقل. خلال عصر النهضة الإيطالية، بدأ العديد من الرسامين البارزين في فهم هندسة الرسم المنظوري. حيث تتيح هذه التقنيات للفنان إنشاء صور واقعية لعالم ثلاثي الأبعاد على لوحة ثنائية الأبعاد. وتفعل العين البشرية تقريبًا الشيء نفسه؛ حيث تحل الشبكية محل اللوحة. والوصف الكامل لهذا معقَّد، ولكن بعبارات بسيطة، يُسقط الفنان مشهدًا حقيقيًّا على لوحة مسطحة من خلال إنشاء خط مستقيم من كل نقطة في المشهد إلى نقطة تمثل عين المشاهد، وتحديد المكان الذي يلتقي فيه هذا الخط مع اللوحة. ويعد النقش الخشبي الرائع «رجل يرسم آلة عود» للرسام ألبريشت دورر تصويرًا حيًّا لهذا الإجراء.

يمكن تحويل هذا الوصف الهندسي إلى صيغة رياضية بسيطة تحول الإحداثيات الثلاثة لنقطة في الفراغ إلى إحداثيَّي الصورة المقابلة على اللوحة. لتطبيق الصيغة، عليك فقط معرفة موضع اللوحة وعين المشاهد بالنسبة إلى المشهد. لأسباب عملية، لا يُطبَّق هذا التحويل، المسمَّى إسقاطًا، على كل نقطة من العنصر، ولكن على نقاط كافية لإعطاء تقريب جيد. وهذه السمة واضحة في النقش الخشبي، الذي يُظهر مجموعة من النقاط على شكل عود، وليس المخطط الكامل للعود. وبالنسبة للتفاصيل الدقيقة، مثل قش السقف، وتموجات النهر، وبالطبع ألوانها، فيمكن بعد ذلك تطبيقها فوق هذه المجموعة من النقاط، باستخدام طُرُق لن أخوض فيها؛ لأننا سنحتاج إلى كتاب آخر لتناولها.

هذا هو ما يحدث بالأساس عندما يُعرَض علينا منظور التِّنين للقرية. يحتوي الكمبيوتر بالفعل على إحداثيات تمثيلية لكل سمة مهمة للقرية مُخزَّنة في الذاكرة. تلعب شبكية عين التِّنين دور اللوحة. إذا عرفنا أين هي، وعند أي زاوية، يمكننا استخدام الصيغة لحساب ما سيراه التنين. هذا يعطي كادرًا واحدًا من المشهد، يظهر القرية في



النقش الخشبي «رجل يرسم آلة عود» للرسام ألبريشت دورر، والذي يوضح إسقاطًا من فراغ ثلاثي الأبعاد إلى لوحة ثنائية الأبعاد.

لحظة زمنية محددة. في الكادر التالي، لا تزال القرية في المكان نفسه، لكن التِّنين وشبكيته قد تحركا. اكتشِف أين ذهبا، وكرر العملية الحسابية، وستحصل على الكادر التالي. اتبع مسار التِّنين عبر السماء، وجمع الكادرات واحدًا تلو الآخر لتحصل على لقطات للمشهد الذي يراه التِّنين.

هذا ليس وصفًا حرفيًّا بالطبع؛ فقط الفكرة الأساسية. هناك حِيَل خاصة لجعل العمليات الحسابية أكثر كفاءة، مما يوفر وقت المعالجة على الكمبيوتر. وللتبسيط، دعونا نتجاهل ذلك.

ينطبق نفس النوع من الحسابات على مشاهد التِّنين المهاجم، التي تُعرض من منظور على مستوى الأرض. نحتاج الآن إلى مجموعة أخرى من النقاط لتحديد مكان التِّنين، والشاشة التي سنسقط عليها كل شيء موجودة على الأرض، وليس التِّنين. من أجل التحديد، دعونا نركز على منظور التِّنين. من وجهة نظره، عينه ثابتة، ويبدو أن القرية هي التي تتحرك. وبينما ينطلق نحو الأرض، يبدو أن كل شيء في القرية يكبر في الحجم،

ثم يميل ويلتفُّ، محاكيًا حركاته الخاصة. وبينما يحلق باتجاه السُّحب، يصغر حجم القرية. طوال الوقت، يجب أن يظل المنظور مقنِعًا، والسبيل الرياضي لذلك هو التعامل مع القرية كعنصر متماسك (ومعقد للغاية). يمكنك الحصول على فكرة عما ينطوي عليه الأمر من خلال التظاهر بأنك تنِّين، وإمساك شيءٍ ما أمام عينيك، ثم تحريكه ذهابًا وإيابًا، وتدويره في اتجاهات عديدة مختلفة.

والآن نحن نمثل كل شيء في «الإطار المرجعي» للتِّنين، وهو ثابت «بالنسبة إلى التِّنين». تتحرك القرية كعنصر متماسك، وهو ما يعني رياضيًّا أن المسافة بين أي نقطتين تظل كما هي. لكن الجسم ككل يمكن أن يتحرك في الفراغ. هناك نوعان أساسيَّان من الحركة: الانتقال، والدوران. في الانتقال، ينزلق الجسم في اتجاهٍ ما دون التواء أو دوران. في الدوران، يدور الجسم حول خط ثابت، وهو المحور، وتتحرك كل نقطة عبر الزاوية نفسها في مستوًى يقطع المحور بزاوية قائمة. يمكن أن يكون المحور أي خط في الفراغ، ويمكن أن يكون للزاوية أي قياس.

كل حركة متماسكة هي مزيج من الانتقال والدوران (ولكن يمكن أن يكون الانتقال عبر مسافة صفرية، وقد يكون الدوران عبر زاوية صفرية، وفي هذه الحالة ليس لهذه التحولات أي تأثير). في الواقع، هذا خطأ؛ فهناك حركة متماسكة ممكنة أخرى، وهي الانعكاس، الذي يعمل كمرآة. لكن لا يمكنك الحصول على انعكاسات بالحركة المتصلة، لذلك يمكننا تجاهلها.

لقد اتخذنا الآن الخطوة الأساسية في تحويل تحريك التِّنين إلى مسألة رياضية. ما نحتاج إلى فهمه هو كيف تتغير إحداثيات نقطة في الفراغ عندما نطبق انتقالًا أو دورانًا. بعد فعل ذلك، يمكننا استخدام الصيغة القياسية لإسقاط الناتج على شاشة مسطَّحة. وقد اتضح أن حركة الانتقال سهلة. لكن مصدر القلق الكبير هو الدوران.

إن كل شيء أسهل بكثير في حالة البُعدين؛ أي في مستوًى ثنائي الأبعاد. لقد صاغ إقليدس قواعد هندسة المستوى في نحو عام ٣٠٠ قبل الميلاد. ومع ذلك، لم يستخدم الحركات المتماسكة. بدلًا من ذلك، استخدم المثلثات المتطابقة، وهي مثلثات لها نفس الشكل والحجم، ولكن في مواضع مختلفة. وبحلول القرن التاسع عشر، كان قد تعلم علماء الرياضيات تفسير مثل هذا الزوج من المثلثات على أنه حركة متماسكة؛ أي، تحوُّل في المستوى يؤدي إلى تحرك المثلث الأول إلى موضع الثاني. وقد عرَّف جيورج برنهارد ريمان الهندسة فيما يتعلق بأنواع محددة من التحول.

باتباع مسار مختلف تمامًا، توصَّل علماء الرياضيات أيضًا إلى طرق فعالة لحساب الحركات المتماسكة في المستوى، كأثر جانبي غير متوقَّع لتطور جديد في الجبر، تكلمنا عنه في الفصل السابق، وهو: الأعداد المركَّبة. فمن أجل انتقال (إزاحة) شكل، مثل PIG الموضح في الفصل السابق، نضيف عددًا مركبًا ثابتًا إلى كل نقطة من هذا الشكل. ومن أجل دورانه عبر الزاوية A، نضرب كل نقطة في e^{iA}. وكميزة إضافية، كانت الأعداد المركبة مثالية لحل المعادلات التفاضُلية للفيزياء، ولكن فقط في الفراغ ثنائي الأبعاد.

كل هذا ألهم هاميلتون فكرةً، أصبحت تشبه الهوس بالنسبة له. فنظرًا لأن الأعداد المركبة فعَّالة جدًّا للفيزياء في حالة البُعدين، لا بد أن يكون هناك أعداد مركبة «فائقة» مناظِرة لها الفعالية نفسها في حالة الأبعاد الثلاثة. وإذا تمكن من إيجاد نظام أعداد جديد من هذا القبيل، فإن الفيزياء الواقعية بأكملها ستكون مفتوحة على مصراعيها. وكان من الواضح حتى كيفية البدء. فنظرًا لأن الأعداد المركبة هي «أزواج» من الأعداد الحقيقية، فإن هذه الأعداد الافتراضية المركبة الفائقة يجب أن تكون «ثلاثيات» من الأعداد الحقيقية. عدد حقيقي لكل بُعد. كانت صيغة إضافة مثل هذه القيم الثلاثية (أو الثلاثيات، كما يطلِق عليها هاميلتون غالبًا) واضحة؛ فقط أضِف المكونات المقابلة. وقد حل الجزء الخاص بالحركات الانتقالية. كل ما كان عليه فعله الآن هو معرفة كيفية ضربها. لكن كل ما جربه فشل، وبحلول عام ١٨٤٢ أصبح مهووسًا بهذه العقبة، حتى إن أطفاله قد لاحظوا الأمر. وكانوا يسألونه كل يوم: «أبي، هل يمكنك ضرب الثلاثيات؟» وفي كل يوم، كان هاميلتون يهز رأسه نافيًا في تجهُّم. كان يمكن جمعها أو طرحها، لكن حساب ناتج ضربها مستحيل.

غالبًا ما يكون من الصعب تحديد التاريخ الدقيق الذي حدث فيه إنجاز رياضي كبير؛ لأنه غالبًا ما تكون هناك فترة طويلة ومُربِكة يتلمَّس خلالها علماء الرياضيات طريقهم قبل الوصول للاكتشاف النهائي. لكن في بعض الأحيان نعرف الوقت والمكان بالضبط. في حالتنا هنا، التاريخ الدقيق هو يوم الاثنين ١٦ أكتوبر ١٨٤٣، والمكان هو دبلن. يمكننا حتى محاولة عمل تخمين مدروس للوقت؛ لأن هاميلتون، الذي كان رئيسَ الأكاديمية الملكية الأيرلندية في ذلك الوقت، كان يسير عبر ممر لجرِّ القوارب موازٍ لقناةٍ مع زوجته في طريقه لحضور اجتماع لمجلس الأكاديمية. وبينما وقف ليلتقط أنفاسه على جسر بروم، خطر في ذهنه حلٌّ للمسألة التي كانت تزعجه لسنوات، ونقشه على سور الجسر بمُديته:

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

وقد تلاشى هذا النقش مع مرور الزمن، ولكن كل عام ينظم مجموعة من العلماء وعلماء الرياضيات مَسيرة عبر الجسر لإحياء الذكرى.

دون تفسير، هذا النقش غامض للغاية. وحتى مع التفسير، قد يبدو الأمر غريبًا وعديم الجدوى، للوهلة الأولى، ولكن هذا هو الحال غالبًا مع الإنجازات الرياضية الكبرى. فهي تستغرق وقتًا حتى تُسبر أغوارها. إذا كان الاكتشاف هو الأعداد المركبة، لكان هاميلتون قد نقش قاعدة بسيطة هي: $i^2 = -1$. تحتوي هذه المعادلة على مفتاح نظام الأعداد المركبة بأكمله؛ وأي شيء آخر يمكن أن يُفهم إذا انطبقت القواعد الحسابية المعتادة. أضف j وk، وكذلك i، وستحدد صيغ هاميلتون نظامًا أكثر شمولًا للأعداد؛ أو بالأحرى، عناصر تشبه الأعداد. وقد أطلق على هذه العناصر اسم «الكواترنيونات»؛ لأنها تحتوي على أربعة مكونات، كل منها عدد حقيقي تقليدي. هذه المكونات عبارة عن عدد حقيقي عادي، ومضاعف حقيقي لعدد يُسمَّى i، وهو الذي يعمل تمامًا مثل العدد التخيُّلي المعتاد الذي له هذا الرمز، ومكونين جديدين: مضاعف حقيقي لعدد يُسمى j، ومضاعف حقيقي لعدد يُسمى k. ومن ثَم، فإن الكواترنيون النموذجي هو تركيب $a + b\mathrm{i} + c\mathrm{j} + d\mathrm{k}$، حيث a، وb، وc، وd هي أربعة أعداد حقيقية عادية. أو، لإزالة أي غموض، رباعية (a وb وc وd) من الأعداد الحقيقية، تخضع لقائمة قصيرة من القواعد الحسابية.

في اليوم التالي لعملية النقش هذه، التي ربما تُعد من أعمال التخريب الطفيفة للممتلكات العامة، كتب هاميلتون إلى صديقه عالم الرياضيات جون جريفز: «لقد بزغت في ذهني فكرة أنه يجب علينا أن نعترف، على نحوٍ ما، بوجود بُعد رابع للفراغ من أجل إجراء العمليات الحسابية على الثلاثيات». وفي رسالة إلى والده، كتب: «بدت دائرة كهربائية وكأنها تغلق، وومضت شرارة». لقد تحدث بصدق كما لو كان يعرف ما سيحدث في المستقبل، لأن اكتشافه اليوم يلعب دورًا حيويًّا في مليارات الدوائر الكهربائية التي تنفذ كوادريليونات من الشرر الصغير. فهي توجد في أجهزة ألعاب الفيديو مثل «بلاي ستيشن ٤»، و«نينتندو سويتش»، و«إكس بوكس»، وتُستخدَم في تشغيل ألعاب مثل «ماينكرافت»، و«جراند ثيفت أوتو»، و«كول أوف ديوتي».

نحن الآن نفهم لماذا واجه هاميلتون الكثير من المتاعب في محاولة ضرب الثلاثيات. إذ لا يمكن أن يتم ذلك. لقد كان يُفترض أن جميع قوانين الجبر المعتادة يجب أن تنطبق، وعلى وجه الخصوص أنه يمكنك القسمة على أي عدد غير صفري، ولكن أيًّا كانت الصيغة التي جربها، فقد فشلت في الامتثال لجميع القوانين اللازمة. وقد أثبت علماء الجبر في وقت

لاحق أن هذا المتطلب متناقض منطقيًّا. إذا كنت تريد انطباق جميع القوانين، فلا يمكنك تجاوز الأعداد المركَّبة. أنت مضطر للتعامل مع بُعدين فقط. إذا كنت تتلاعب بصيغ هاميلتون، وتفترض أن قانون التجميع ينطبق، فستجد بسرعة أنه قد تجاهل بالفعل قانونًا آخر، وهو قانون الإبدال في الضرب. على سبيل المثال، تشير الصيغ الخاصة به ضمنيًّا إلى أن $ij = k$، في حين أن $ij = k$.

كان لدى هاميلتون الخيال للتخلي عن هذا القانون، على الرغم من أن هذا كان مزعجًا، على أقل تقدير. لكننا نعلم الآن أنه حتى في هذه الحالة كان لا يزال من المتعذر إنشاء نظام عددي مستقل من الثلاثيات. تخبرنا مبرهَنة رائعة لأدولف هورفيتس، نُشرت بعد وفاته في عام ١٩٢٣، أن الأعداد الحقيقية، والأعداد المركبة، والكواترنيونات هي «جبور القسمة الحقيقية» الوحيدة. وهذا يعني أنه يمكننا إجراء هذه العملية مع واحد أو اثنين أو أربعة من المكونات الحقيقية، ولكن «ليس ثلاثة». من بين هذه، فقط الأعداد الحقيقية، والأعداد المركَّبة هي التي تخضع لقانون الإبدال. من خلال إضعاف قانون التجميع، يمكنك أيضًا الحصول على نظام مكون من ثمانية مكونات، تُسمى الأوكتونيونات أو أعداد كايلي. سيصبح العدد الطبيعي التالي للمكونات هو ١٦، ولكن الآن حتى الشكل الذي جرى إضعافه من قانون التجميع يفشل. هذه نهاية المهمة. لا شيء آخر ممكن على هذا المنوال. إن هذا هو أحد تلك الأشياء الغريبة التي تقدمها الرياضيات أحيانًا؛ في هذا السياق، الحد التالي في التسلسل ١، ٢، ٤، ٨، ... غير موجود.

ومن ثَم قضى السِّير ويليام المسكين سنوات من الجهد غير المثمِر في محاولة لتحقيق المستحيل. واعتمد إنجازه النهائي على التخلي عن «مبدأين» رئيسيين، وهما: أن الضرب يجب أن يكون إبداليًّا، وأن نظام الأعداد «الصحيح» للفيزياء ثلاثية الأبعاد يجب أن يتكوَّن من ثلاثة مكونات. إنه يستحق تقديرًا كبيرًا لإدراكه أنه لتحقيق تقدم، كان عليه التخلي عن كليهما.

يعكس الاسم الذي اختاره هاميلتون لنظامه الجديد، الكواترنيونات، علاقته بالأبعاد الأربعة. وقد روَّج لاستخدامها في العديد من مجالات الرياضيات والفيزياء، موضحًا أن نوعًا خاصًّا من الكواترنيون، «الجزء المتَّجهي» $bi + cj + dk$، يمكن أن يمثل الفراغ ثلاثي الأبعاد بطريقة أنيقة. ومع ذلك، فقد أصبحت الكواترنيونات صيغًا عفا عليها الزمن عندما ظهر نظام أكثر بساطة، هو الجبر المتجِّهي. لقد ظلت مهمة في الرياضيات

البحتة والفيزياء النظرية، لكنها فشلت في الارتقاء إلى مستوى آمال مكتشفها فيما يتعلق بالاستخدامات العملية. ظل هذا إلى أن ظهرت ألعاب الكمبيوتر والصور الرُّسومية المنشأة بالكمبيوتر المستخدمة في صناعة السينما.

وقد نشأ الرابط بين هذا المجال والكواترنيونات لأن عناصر الصور الرسومية المنشأة بالكمبيوتر يجب أن تدور في فراغ ثلاثي الأبعاد. وأفضل طريقة للقيام بذلك تعتمد على كواترنيونات هاميلتون. فهي توفر أداةً جبرية بسيطة لحساب تأثيرات التدوير بسرعة وبدقة. كان هاميلتون سيُصاب بالدهشة، لأن الأفلام لم تكن موجودة في عصره. فالرياضيات القديمة يمكن أن تكتسب استخدامات جديدة على نحوٍ جوهري.

لقد ظهر اقتراح استخدام الكواترنيونات في الصور الرسومية المصمَّمة بالكمبيوتر في ورقة بحثية عام ١٩٨٥ كتبها كين شوميك، وكانت بعنوان «تحريك الدوران باستخدام منحنيات الكواترنيون».[2] وتبدأ الورقة بعبارة «إن الأجسام الصلبة تتدحرج وتتقلب في الفراغ. وفي الرسوم المتحركة المنشأة باستخدام الكمبيوتر، هكذا تفعل الكاميرات. ويُوصَف دوران هذه العناصر على أفضل نحوٍ باستخدام نظام رباعي الإحداثيات، أي، الكواترنيونات». ويضيف شوميك أن الكواترنيونات لها الميزة الرئيسية المتمثِّلة في السماح بحدوث «حركة» سلسة؛ وهذا يعني توليد الصور البينية بين نقطتي نهاية محددتين.

قبل الخوض في التفاصيل، تجدر مناقشة بعض ميزات الرسوم المتحركة المنشأة باستخدام الكمبيوتر التي تدعم منهجه. هذه المناقشة مُبسَّطة إلى حد كبير، ويُستخدم الكثير من التقنيات الأخرى أيضًا. إن الفيلم أو الصورة المتحركة على شاشة الكمبيوتر هي في الواقع سلسلة من الصور الثابتة، تظهر في تتابُع سريع لخلق وهم الحركة. في بدايات الرسوم المتحركة — فكر في رسوم والت ديزني — رسم الفنانون كُلًّا من هذه الصور الثابتة كقطعة فنية واحدة. لقد تطلب الأمر مهارة كبيرة لإنشاء حركات واقعية (بقدرِ ما يمكن أن يصبح وجود فأر متكلم أمرًا واقعيًّا). يمكن استخدام حِيَل مختلفة لتبسيط العملية، مثل وجود خلفية واحدة تظل كما هي طوال التتابع، وتركيب العناصر التي تتغير فوقها.

هذه الطريقة شاقة للغاية، وغير عملية في معارك الفضاء السريعة الحركة، أو أي رسوم متحركة أخرى عالية الجودة. تخيَّل أنك تحرك تتابع صور من فيلم أو لعبة تتفاعل فيها عدة مركبات فضائية. وقد صُمِّمت بالفعل كل مركبة (على جهاز كمبيوتر) بواسطة فنان متخصِّص في هذا المجال. وتُمثل كمجموعة ثابتة من النقاط في الفراغ، المرتبِطة

بعضها ببعض لتشكيل شبكة من المثلثات الصغيرة. يمكن تمثيل هذه بدورها من خلال قوائم مناسبة من الأعداد؛ إحداثيات النقاط، مع تحديد أي منها يتصل بالآخر. يمكن لبرامج الكمبيوتر «تصيير» هذه المجموعة من الأعداد (وغيرها، مثل اللون) لإنشاء صورة ثنائية الأبعاد لَمركَبة الفضاء. يوضح هذا كيف ستبدو المَركَبة عند وضعها في موضع مرجعي ومشاهدتها من موقع معيَّن.

ولجعل مركبة الفضاء تتحرك، يغير مُصمِّم الرسوم المتحركة هذه القائمة من الأعداد بطريقة مناسبة. على سبيل المثال، لنقلها إلى موقع جديد، تُضاف ثلاثية ثابتة من الأعداد (متجه الإزاحة) إلى جميع النقاط، بينما تظل الروابط كما كانت من قبل. وبعد ذلك يجري تصيير هذه القائمة الجديدة للحصول على الصورة الثابتة التالية، وهكذا. وتُعد إضافة مُتَّجه أمرًا بسيطًا وسريعًا، ولكن يمكن أيضًا تدوير العناصر في الفراغ. إذ يمكنها الدوران حول أي محور، وقد يتغير هذا المحور مع تحرك العنصر. يغير الدوران أيضًا قوائم الأعداد، ولكن بطرق أكثر تعقيدًا.

في كثير من الأحيان، يُعرف مصمم الرسوم المتحركة من أين يبدأ العنصر (على الأرض، مثلًا)، وإلى أين يجب أن ينتقل (يصطف في مواجهة القمر البعيد، مثلًا). يُعد الموضع الدقيق على الشاشة ثنائية الأبعاد أمرًا حيويًّا، لأن هذا ما يراه المشاهد. إنه يجب أن يبدو فنيًّا أو مثيرًا للاهتمام على نحوٍ مناسب. لذلك فإن هذين الموقعين، البداية والنهاية، يُمثلان بقائمتين محسوبتين بعنايةٍ من الأعداد. إذا كانت الحركة الدقيقة بينهما أقل أهمية، فيمكن توجيه الكمبيوتر إلى إجراء عملية توليد للصور البينية بين موقعي البداية والنهاية. هذا يعني أن تُدمَج القائمتان معًا بواسطة قاعدة رياضية تمثل الانتقال من واحدة إلى الأخرى. إن حساب متوسط كل زوج من الإحداثيات المقابلة، على سبيل المثال، يعطي عنصرًا في منتصف المسافة بين موقعَي البداية والنهاية. ومع ذلك، هذا أمر مبسط للغاية بحيث لا يمكن قبوله. فهو عادة ما يُشوِّه شكل مَركَبة الفضاء.

إن الحيلة المطلوبة هنا هي استخدام حركات متماسكة في الفراغ للقيام بتوليد الصور البينية. يمكنك البدء بنقل المركبة إلى نقطة المنتصف، وتدويرها بزاوية قياسها ٤٥ درجة. افعل هذا مرة أخرى وستصبح في موقع النهاية الصحيح، بعد أن استدارت بزاوية ٩٠ درجة. من أجل وهم الحركة المتصلة، يمكنك تكرار الانتقال بنسبة ١ / ٩٠ من الاختلاف في المواضع، والتدوير بزاوية قياسها ١ درجة في كل مرة. في الممارسة العملية ستُستخدم خطوات أصغر بكثير.

بشكل أكثر تجريدًا، يمكننا التفكير في هذا الإجراء من حيث «فراغ التكوين» لجميع الحركات المتماسكة. حيث تتوافق كل نقطة في هذا الفراغ مع حركة متماسكة متفردة، وتعطي النقاط القريبة حركاتٍ قريبةً. لذا فإن تسلسلًا من الحركات، كلٌّ منها قريب من سابقه، يتوافق مع تسلسل من النقاط، كلٌّ منها قريب من سابقه. وبربط هذه النقاط بعضها ببعض على الترتيب يمكننا الحصول على مسار مضلَّع في فراغ الحركات المتماسكة. وبجعل الخطوات صغيرة جدًّا يمكننا الحصول على مسار متصل. إذن الآن أعيدت صياغة مسألة توليد الصور البينية بين صورة البداية إلى صورة النهاية على أنها مسألة إيجاد مسار عبر فراغ التكوين. إذا أردنا أن تكون الانتقالات سلِسة، يجب أن يكون هذا مسارًا سلِسًا، دون انحناءات مفاجئة. وهناك طُرق جيدة لجعل المضلَّع سلِسًا.

إن «بُعد» فراغ التكوين هذا — أي، عدد الإحداثيات اللازمة لتحديد نقطة فيه — هو ستة. هناك ثلاثة أبعاد للانتقالات: إحداثي واحد لكل من الشمال-الجنوب، والشرق-الغرب، وأعلى-أسفل. ثم نحتاج إلى اثنين آخرين لتحديد موضع محور الدوران، وواحد أخير لزاوية الدوران. لذا فإن ما بدأ كمسألة حول تحريك عنصر بسلاسة في ثلاثة أبعاد أصبح الآن مسألة تحريك نقطة على طول مسارٍ سلِس في ستة أبعاد. يمكن معالجة مسألة إعادة الصياغة هذه الخاصة بالرسوم المتحركة باستخدام تقنيات من الهندسة متعدِّدة الأبعاد لتصميم المسارات المناسبة.

في الرياضيات التطبيقية، تعود الطريقة التقليدية للتعامُل مع دوران أي عنصر متماسك إلى أويلر. فقد أثبت في عام ١٧٥٢ أن أي حركة متماسكة لا تعكس العنصر هي إما انتقال، أو دوران حول محورٍ ما.[3] ومع ذلك، من أجل الحسابات، جمع ثلاث عمليات دوران حول المحاور الثلاثة في التمثيل الإحداثي المعتاد للفراغ، وهي طريقة تُسمى الآن «زوايا أويلر». وكمثال، درس شوميك اتجاه طائرة ما، وهو الذي يُحدد في علوم الطيران من خلال ثلاث زوايا:

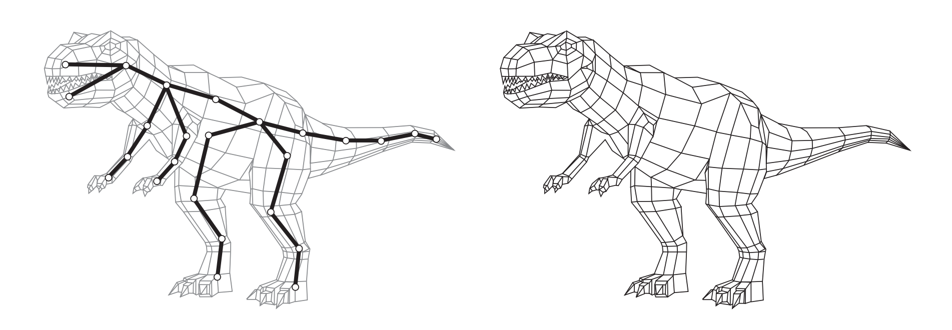
- الانعراج (أو الوجهة)، أي، الدوران حول محور رأسي، يعطي اتجاه الطائرة في مستوًى أفقي
- الميل، أي، الدوران حول محور أفقي عبر الأجنحة
- اللف، أي، الدوران حول الخط الذي يمتد من مقدمة الطائرة إلى ذيلها.

المشكلة الأولى في هذا النوع من التمثيل هي أن الترتيب الذي تُطبَّق المكونات به مهم للغاية. عمليات الدوران لا تبديلية. أما المشكلة الثانية، فهي أن اختيار المحاور ليس متفردًا، وأن مجالات التطبيق المختلفة تستخدم خيارات مختلفة. أما الثالثة، فهي أن الصيغ الخاصة بدمج دورانَين متتاليين، المعبر عنها بزوايا أويلر، معقَّدة للغاية. لا تسبب هذه السمات الكثير من المتاعب في تطبيقات الطيران الأساسية، وهي ذات صلة إلى حدٍّ كبير بالقوى المؤثرة على الطائرة عندما تكون في اتجاه معيَّن، ولكنها غير ملائمة للرسوم المتحركة المنشأة باستخدام الكمبيوتر، حيث تخضع العناصر لتتابعاتٍ كاملة من الحركات.

حاجَج شوميك بأن الكواترنيونات، على الرغم من أنها أقل مباشرةً، توفر طريقة لتحديد الدورانات التي تكون أكثر ملاءمةً بكثير لمصمِّمي الرسوم المتحركة، خاصَّة فيما يتعلق بتوليد الصور البينية. ينقسم الكواترنيون $a + b\mathrm{i} + c\mathrm{j} + d\mathrm{k}$ إلى جزء قياسي a وجزء متَّجهي $v = b\mathrm{i} + c\mathrm{j} + d\mathrm{k}$. ولتدوير المتَّجه a بمقدار الكواترنيون q، نضرب v في q^{-1} على اليسار وq على اليمين لنحصل على $q^{-1}vq$. ومهما كانت قيمة q، فإن النتيجة ستكون مرة أخرى هي متَّجه، مع وجود جزء قياسي صِفري. تُظهر قواعد هاميلتون الخاصة بضرب الكواترنيونات، على نحوٍ مثير للاهتمام، أن أي دوران يناظر كواترنيونًا واحدًا. والجزء القياسي هو جيب تمام نصف الزاوية التي يدور من خلالها العنصر؛ ويشير الجزء المتَّجهي في اتجاه محور الدوران، ويكون طوله مساويًا لجيب نصف تلك الزاوية. لذا فإن الكواترنيون يشفر بدقة الهندسة الكاملة للدوران، مع الإزعاج الطفيف المتمثِّل في أن الصيغ الطبيعية تعمل مع نصف الزاوية، وليس الزاوية مباشرة.[4]

تتجنب الكواترنيونات التشوُّهات التي يمكن أن تتراكم إذا جرى تدوير عنصر عدة مرات، مثلما لا بد أن يحدث في كثير من الأحيان. ويمكن لأجهزة الكمبيوتر إجراء حسابات دقيقة مع الأعداد الصحيحة، ولكن لا يمكن تمثيل الأعداد الحقيقية بدقة تامة، لذلك تحدُث بعض الأخطاء الصغيرة. فمع الأساليب المعتادة لتمثيل التحويلات، يتغير شكل العنصر الذي يجري التعامُل معه قليلًا، وهو أمر تستطيع العين اكتشافه. في المقابل، إذا أخذت أحد الكواترنيونات وغيَّرت الأعداد قليلًا، فإن النتيجة تظل كواترنيونًا، ولا تزال تمثل دورانًا؛ لأن «كل» كواترنيون يناظر دورانًا ما. إنه مجرد دوران مختلف قليلًا عن الدوران الدقيق. وتكون العين أقل حساسية لاكتشاف مثل هذه الأخطاء، ويمكن تخفيف أثرها بسهولة إذا كانت كبيرة جدًّا.

تُعتبر الكواترنيونات إحدى الطرق لإنشاء حركة واقعية في ثلاثة أبعاد، ولكن حتى الآن ما وصفته ينطبق على العناصر المتماسكة. ربما مَركَبة فضاء، أما تنين، فلا. فالتنين ينثني. إذن كيف نصمم تنينًا واقعيًّا باستخدام تقنية الصور الرسومية المعتمِدة على الكمبيوتر؟ هناك طريقة شائعة تنطبق ليس فقط على التنين، ولكن على أي شيء تقريبًا، وسنجربها مع ديناصور؛ لأنني حصلت على صور مناسبة. يقلل هذا الأسلوب حركة العنصر المرن إلى حركة مجموعة من العناصر المتماسكة المرتبطة. يمكنك استخدام أي طريقة تريدها مع العناصر المتماسكة، مع تعديلات إضافية لربط بعضها ببعض على نحو صحيح. على وجه التحديد، إذا كنت تستخدم الكواترنيونات لتدوير وانتقال العناصر المتماسكة، فيمكن تعديل نفس الطرق لتعمل مع ديناصور مرِن.



على اليمين: شبكة مضلَّعة بسيطة لتيرانوصورس ريكس. على اليسار: شبكة متصلة بهيكل عظمي بدائي.

تتمثل الخطوة الأولى في إنشاء نموذج رقمي ثلاثي الأبعاد للديناصور، يكون سطحه عبارة عن شبكة معقدة من المضلعات المسطحة؛ مثلثات ومستطيلات ومضلعات رباعية أقل انتظامًا. يعرض برنامج الكمبيوتر المستخدم في أداء هذه المهمة الشكل على نحو هندسي، ويمكننا تحريكه وتدويره وتكبير التفاصيل وما إلى ذلك، مع ظهور كل حركة على شاشة الكمبيوتر. ومع ذلك، فإن ما يتعامل معه البرنامج ليس الجوانب الهندسية في حد ذاتها، ولكن قائمة الإحداثيات العددية لنقاط تلاقي المضلعات. في الواقع، المبادئ الرياضية التي يستخدمها البرنامج لمساعدتك في رسم الديناصور هي نفسها، إلى حد كبير،

تلك المستخدمة لتحريك الناتج. الفرق الرئيسي هو أنه في هذه المرحلة يكون الديناصور ثابتًا، ويجري تدوير وانتقال وجهة النظر. في الرسوم المتحركة، يمكن أن تكون وجهة النظر ثابتة أثناء تحرك الديناصور؛ أو، كما هو الحال مع التنين المهاجم، قد تتحرك وجهة النظر أيضًا.

إذن الآن أصبح لدينا نموذج ديناصور متماسك وبسيط. كيف نجعله يتحرك؟ ما لن نفعله هو ما كان على الرسامين فعلُه في أيام ميكي ماوس: إعادة رسم صورة الديناصور وهو في وضع مختلف على نحو طفيف وتكرار ذلك مئات المرات. فنحن نريد أن يقوم الكمبيوتر بكل المهام الشاقة. لذلك نختزل الديناصور إلى هيكل عظمي بدائي: عدد صغير من العِصِيِّ المتماسكة («العظام») المتصلة عند أطرافها. ونمرر هذه العصي عبر الجسم والأطراف والذيل والرأس. ليس هذا هيكلًا عظميًّا صحيحًا من الناحية التشريحية، بل مجرد إطار يسمح لنا بثني الأجزاء الرئيسية للحيوان. ويُمثَّل هذا الهيكل العظمي أيضًا على شكل قائمة إحداثيات لطرفي كل عظمة.

هناك طريقة فعَّالة للغاية للحصول على حركات واقعية، خاصة للأشخاص أو المخلوقات التي تتخذ هيئة بشرية، وهي التقاط الحركة. فيؤدي أحد الممثِّلين الحركات المطلوبة أمام كاميرا واحدة، أو عدة كاميرات للحصول على بيانات ثُلاثية الأبعاد. وتُلحَق نقاط بيضاء بالنقاط الرئيسية على جسده، مثل القدمين والركبتين والوركين والمرفقين، ويحلل الكمبيوتر مقطع الفيديو الخاص بالممثِّل لتحديد كيفية تحرك النقاط. ثم تُستخدَم البيانات الناتجة لتحريك الهيكل العظمي. هذه هي الطريقة التي حُرِّك بها المخلوق «جولوم» في ثلاثية «ملك الخواتم». بطبيعة الحال، إذا كنت تريد حركات غير بشرية غريبة (لكن واقعية)، فيجب على الممثل أن يتحرك بطريقة غريبة على نحوٍ ملائم.

بغض النظر عن الطريقة التي حركنا بها الهيكل العظمي، بمجرد أن نحصل على النتيجة المطلوبة، نضع الشبكة فوق الهيكل العظمي. هذا يعني أننا نجمع بين قائمتَي الإحداثيات، مع تحديد روابط إضافية بين مواضع العظام وتلك الخاصة بالأجزاء المحيطة من الشبكة. ثم، لجزء كبير من العملية، ننسى أمر الشبكة، ونحرك الهيكل العظمِي. فهنا يُثمر عملنا على الحركات المتماسكة على نحوٍ جيد، لأن كل عظمة متماسكة، ونريدها أن تتحرك في ثلاثة أبعاد. يجب علينا أيضًا فرض قيود على الحركة، بحيث يستمر الهيكل العظمي في الترابط. فإذا حركنا عظمة معيَّنة، يجب أن تتحرك أيضًا بعض أطراف العظام المرتبطة بها، لذلك نُغير إحداثيات تلك الأطراف إلى المواضع الصحيحة. ثم يمكننا

تحريك تلك العظام بشكل متماسك أيضًا، مما يؤثر بالطبع على العظام المرتبطة بها، وبتتبُّع عظمة وراء عظمة يمكننا جعل الهيكل العظمي بأكمله ينثني قليلًا. يمكننا تحريك القدمين لجعله يمشي، وجعل ذيله ينثني لأعلى أو لأسفل أو جانبيًّا، وجعل فَكَّيه الشرسَين ينفتحان، لكننا نفعل كل ذلك على الهيكل العظمي. فهذا أبسط وأسرع و«أرخص»، لأن الهيكل العظمي له عدد أقل من الأجزاء.

عندما نحصل على الحركة المطلوبة للهيكل العظمي، فقد نجد أنه من المفيد تغطيته بالشبكة مرة أخرى، بدءًا من الكادر الأول للحركة. ثم يجعل برنامج التحريك الشبكةَ تتبع حركات الهيكل العظمي عبر كادرات متتالية، دون الحاجة إلى أن نقوم نحن بأي عمل إضافي يتجاوز نقرة واحدة أو نقرتين بالماوس. ومن خلال القيام بذلك، يمكننا التحقق من أن التحريك لا يزال يبدو واقعيًّا عندما يتحرك الديناصور بالكامل وفق حركة هيكله العظمي.

الآن يمكننا ممارسة أي نوع من الأعمال الإبداعية. يمكننا تغيير موضع «الكاميرا»، أي، وجهة النظر التي يستخدمها البرنامج، من خلال استخدام وضع التقريب للحصول على لقطة مقرَّبة، أو عرض الديناصور وهو يعدو من مسافة بعيدة، أو غير ذلك. ويمكننا إنشاء مخلوقات أخرى، ربما قطيع من الحيوانات العاشبة وهو يهرب من التيرانوصور المتوحش. مرة أخرى، يتم ذلك بشكل أساسي باستخدام الهياكل العظمية ثم تُغطَّى بالشبكات. يمكننا تحريك كل مخلوق على حدة، ثم تركيبها جميعًا معًا لصنع مشهد صيد.

نظرًا لأن الهياكل العظمية هي مجرد أشكال عَصَوية، ففي هذه المرحلة ربما لم نقُم بأي شيء لمنع مخلوقين من احتلال المساحة نفسها. يمكن أن ينبهنا إجراء المزيد من التعديلات عبر البرنامج إلى أي تصادمات من هذا النوع. عندما نضع الشبكات فوق الهياكل العظمية، ستتداخل المضلَّعات الموجودة في المقدمة مع تلك الموجودة في الخلف، وبما أن الديناصورات ليست شفَّافة، يتعين علينا التخلُّص من أي مناطق يجب إخفاؤها. كل هذا يتم باستخدام عمليات حسابية بسيطة في هندسة الإحداثيات، ولكنها عمليات كثيرة إلى حدٍّ ما. وقبل أن تصبح أجهزة الكمبيوتر سريعة جدًّا، لم يكن ذلك ممكنًا. أما الآن فأصبح الأمر روتينيًّا.

لا يزال هناك المزيد من العمل الذي يتعيَّن القيام به، لأن الديناصور الذي يشبه تجمُّعًا من العديد من المضلَّعات ليس مثيرًا للإعجاب على نحوٍ كبير. علينا أن نضع أنماطَ

جلدٍ واقعيةً فوق المضلعات، ثم نحدد معلومات الألوان، وربما نصنع أنسجة واقعية؛ إذ يبدو الفراء مختلفًا تمامًا عن القشور. تتطلب كل خطوة برنامجًا مختلفًا، ينفذ تقنيات رياضية مختلفة. هذه الخطوة تُسمَّى التصيير، وهي تجمع الصورة النهائية التي تظهر على الشاشة عندما نشاهد الفيلم. ولكن في قلب كل شيء توجد مليارات العمليات الحسابية التي تحرك النقاط والحواف على نحو متماسك.

هذه الأساليب الرياضية لها ميزة أخرى أيضًا. في أي مرحلة، يمكننا أن نقرر أن شيئًا ما ليس صحيحًا تمامًا، ونغيِّره. إذا كنا نريد ديناصورًا أخضر بدلًا من ديناصور بُني، فلن يتعيَّن علينا رسم كل شيء مرة أخرى. سنستخدم نفس الهيكل العظمي والشبكة، ونفس الحركات ونفس نسيج الجلد، لكننا سنغير اللون.

عند تحريك فيلم أو لعبة، تستخدم فِرَق الخبراء مجموعة من حِزَم البرامج القياسية التي طورتها الصناعة لتنفيذ هذه العمليات. لإعطائك فكرة عن مدى تعقيد هذه الأنشطة، سأُلقي نظرة على بعض الشركات وحِزَم البرامج المستخدمة في صنع فيلم «أفاتار».

لقد نُفذ الجزء الأكبر من أعمال التحريك بواسطة شركة ويتا ديجيتال في نيوزيلندا، المشهورة بعملها في سلسلة أفلام «ملك الخواتم» و«ذا هوبيت». وأنشأت شركة إندستريال لايت آند ماجيك، التي تأسست في عام ١٩٧٥ على يد جورج لوكاس لإنشاء مؤثرات خاصة لأول فيلم من سلسلة أفلام «ستار وورز» (حرب النجوم)، ١٨٠ تتابعًا، خاصةً تلك الخاصة بالطائرة في المعركة النهائية. أما باقي الإسهامات فجاءت من شركات في المملكة المتَّحدة وكندا والولايات المتحدة الأمريكية، أضافت تفاصيل خاصة مهمة؛ مثل شاشات غرف التحكم، وشاشات العرض بمستوى الرأس الملحقة بالأقنعة، محاكية بذلك تكنولوجيا المستقبل. وقد نُفِّذت معظم هذه اللقطات بواسطة حزمة برامج «مايا» الخاصة بشركة أوتوديسك. مع الاستعانة بحزمة برامج «مودو» الخاصة بشركة لوكسولوجي لتصميم النماذج، وخاصة الطائرة الحربية «سكوربيون». وصنع برنامج «هوديني» المشاهد الخاصة ب «هيلز جيت». وصُمِّمت المخلوقات الفضائية باستخدام أداة «زي برش». وصُحِّحت الألوان باستخدام برنامج «سموك» الخاص بشركة أوتوديسك، وصنعت حزمة برامج «ماسيف» محاكاة للنباتات الفضائية، واستُخدمت أداة «مدبوكس» لتصميم الجبال الطافية. وأُنشئت الأنسجة والتصميمات المفاهيمية الأولية باستخدام برنامج «فوتوشوب» الخاص بشركة أدوبي. إجمالًا، لقد شاركت حوالي اثنتي عشرة شركة، واستُخدمت ٢٢ أداة برمجية مختلفة، بالإضافة إلى عدد لا يُحصى من البرامج المساعدة المخصصة.

يتم الآن دمج بعض المبادئ الرياضية المعقدة للغاية في التحريك بواسطة الكمبيوتر. تتمثل الأهداف دائمًا في جعل مهمة مصمِّم الرسوم المتحركة بسيطة قدر الإمكان، والحصول على نتائج واقعية، وخفض التكاليف والوقت. إننا نريدها كلها، ونريدها الآن، ونريدها رخيصة.

لنفترض، على سبيل المثال، أن استوديو الأفلام به مكتبة للصور المتحركة لديناصور تتضمَّن تتابعات حركية مختلفة له. في أحدها، يعدو للأمام خلال «دورة مشي» واحدة، جزء واحد من حركة متكررة بشكل دوري. وفي تتابع آخر، يقفز في الهواء ثم يرتطم بالأرض. ونحن نريد إنشاء تتابع يركض فيه خلف حيوان صغير آكل للعشب ثم يقفز فوقه. إن إحدى الطرق الفعالة للبدء هي أن نجمع معًا اثنتي عشرة، أو نحو ذلك، من دورات المشي الخاصة بالعَدْو، ثم نضيف القفزة في النهاية. بالطبع سنقوم بعد ذلك بتعديل كل شيء حتى لا يكون من الواضح أن نفس التتابع يتكرر اثنتي عشرة مرة، لكن هذه بداية جيدة.

من المنطقي تجميع التتابعات معًا على مستوى الهيكل العظمي. يمكن عمل جميع الأشياء الأخرى، مثل تطبيق الشبكات وإضافة اللون والنسيج لاحقًا. لذا علينا أن نفعل ما هو بسيط، ونجمع اثنتي عشرة نسخة من دورة المشي الخاصة بالعدو مع القفزة، ونرى كيف يبدو الأمر.

سيبدو فظيعًا.

الأجزاء المنفصلة جيدة، لكنها لا تتكامل معًا على نحو سلِس. لذا، النتيجة متقطعة وغير مقنِعة.

حتى وقت قريب، كان سيكون ملاذك الوحيد هو تعديل الروابط يدويًّا، وربما دمج بعض أجزاء حركة جديدة. وحتى عندئذٍ، كانت المهمة صعبة. لكن بعض التطورات الحديثة في التقنيات الرياضية تَعِدُ بتقديم حلول للمشكلة بطريقة أفضل بكثير. والفكرة هي استخدام طرق انتقال سلس بين الكادرات لملء أي فجوات والتخلص من الانتقالات المفاجئة. تتمثل الخطوة الأساسية في إيجاد طرق جيدة للقيام بذلك مع عَظْمة واحدة في الهيكل العظمي، أو بشكل أعم منحنًى واحد. بعد حل هذه المشكلة، يمكنك تجميع الهيكل العظمي معًا من العظام الفردية.

يُطلق على مجال الرياضيات الجاري تجربته حاليًّا اسم نظرية الأشكال. لذا فلنبدأ بالسؤال الواضح: ما الشكل؟

في الهندسة العادية، تقابلنا الكثير من الأشكال القياسية: مثلث، مربع، متوازي أضلاع، دائرة. عندما تفسَّر هذه الأشكال في هندسة الإحداثيات، فإنها تتحول إلى معادلات. في المستوى، على سبيل المثال، النقطتان (x, y) على دائرة الوحدة هما بالضبط هاتان اللتان تحققان المعادلة $x^2 + y^2 = 1$. هناك طريقة أُخرى مناسبة جدًّا لتمثيل الدائرة وهي استخدام ما يُسمى «البارامتر». وهو متغير مساعد، على سبيل المثال t، ويمكننا التفكير فيه على أنه يمثل الزمن، إلى جانب صيغتين لكيفية اعتماد x وy على t. إذا كان t يمر عبر نطاقٍ معين من الأعداد، فإن كل قيمة من قيم t تعطي إحداثيَّين $x(t)$ و$y(t)$. احصل على الصيغتين الصحيحتين، وعندئذٍ ستحدد هذه النقاط الدائرة.

إن الصيغتين البارامتريَّتين القياسيتين للدائرة مثلثيتان:

$$x(t) = \cos t, \quad y(t) = \sin t$$

ومع ذلك، من الممكن أيضًا تغيير كيفية ظهور البارامتر في الصيغة ويظل الناتج دائرة. على سبيل المثال، إذا غيرنا t إلى t^3، فإن الصيغتين

$$x(t) = \cos t^3, \quad y(t) = \sin t^3$$

تحددان أيضًا دائرة، وهي الدائرة نفسها. يحدث هذا التأثير لأن بارامتر الزمن ينقل معلومات أكثر من مجرد كيفية اختلاف x وy في الصيغة الأولى، تتحرك هذه النقطة بسرعة ثابتة مع تغيُّر t. بالنسبة للثانية، فهي لا تفعل ذلك.

نظرية الأشكال هي وسيلة للتحايل على هذا النقص في التفرد. فالشكل هو منحنًى، يُنظر إليه على أنه عنصر لا يعتمد على صيغة بارامترية محددة. لذا فإن منحنيَين بارامتريَّين يحددان نفس الشكل إذا كان بإمكاننا تغيير البارامتر وتحويل صيغة إلى الأخرى، مثل تغيير t إلى t^3. على مدى القرن الماضي، توصَّل علماء الرياضيات إلى طريقة قياسية للقيام بهذا النوع من الأشياء. إنه ليس ما يرجح أن أي شخص آخر قد يفكر فيه، لأنه يتطلب وجهة نظر تجريدية إلى حدٍّ ما.

لا تتمثل الخطوة الأولى في دراسة منحنًى بارامتري واحد فقط، بل و«فراغ» جميع المنحنيات البارامترية «الممكنة». ومن ثَم نقول إن «نقطتين» في هذا الفراغ (أي منحنيين بارامتريين) تكونان متكافئتين، إذا كان بإمكاننا الانتقال من إحداهما إلى الأخرى عن طريق تغيير البارامتر. وعندئذٍ يُعرَّف «الشكل» على أنه فئة تكافؤٍ كاملة من المنحنيات، أي، مجموعة جميع المنحنيات المكافئة لمنحنًى محدد.

إنها نسخة أكثر عمومية من الحيلة المستخدمة في القيام بعمليات حسابية وفقًا لمقياس. فبالنسبة للأعداد الصحيحة بمقياس ٥، على سبيل المثال، «الفراغ» هو جميع الأعداد الصحيحة، ويصبح عددان صحيحان متكافئين إذا كان الفرق بينهما من مضاعفات ٥. هناك خمس فئات تكافؤ، وهي:

كل مضاعفات العدد ٥
كل مضاعفات العدد ٥ مع إضافة ١
كل مضاعفات العدد ٥ مع إضافة ٢
كل مضاعفات العدد ٥ مع إضافة ٣
كل مضاعفات العدد ٥ مع إضافة ٤.

لماذا نتوقف عند هذا الحد؟ لأن مضاعف ٥ مع إضافة ٥ هو مجرد مضاعف أكبر قليلًا للعدد ٥.

في هذه الحالة، فإن مجموعة فئات التكافؤ، التي يشار إليها بـ $\mathbb{Z}_5$، لها الكثير من الخصائص المفيدة. في الواقع، أظهر الفصل الخامس أن جانبًا كبيرًا من نظرية الأعداد الأساسية يرتكز على هذه البنية. نقول إن $\mathbb{Z}_5$ هي «فراغ خارج القسمة» للأعداد الصحيحة بمقياس ٥. وهذا ما تحصل عليه إذا تظاهرت أن الأعداد التي الفرق بينهما ٥ متطابقة.

يحدث شيء مشابه للحصول على فراغ الأشكال. فبدلًا من الأعداد الصحيحة، لدينا فراغ كل المنحنيات البارامترية. فبدلًا من تغيير الأعداد بمضاعفات ٥، نغير صيغة البارامتر. لذا سنحصل على فراغ خارج قسمة عبارة عن فراغ جميع المنحنيات البارامترية التي تعد متكافئة إذا كان بالإمكان الانتقال من أحدها للآخر بتغيير البارامتر. قد يبدو هذا بلا معنًى، لكنها حيلة قياسية أصبحت قيمتها واضحة على مدى مدة زمنية طويلة. أحد أسباب أهميتها هو أن فراغ خارج القسمة هو الوصف الطبيعي للعناصر التي نهتم بها. والسبب الآخر هو أن فراغ خارج القسمة عادةً ما يكتسب تركيبًا مثيرًا للاهتمام من الفراغ الأصلي.

بالنسبة لفراغ الأشكال، فإن العنصر الرئيسي المثير للاهتمام في التركيب هو قياس المسافة بين شكلين. خذ دائرة وشَوِّهْها قليلًا؛ ستحصل على منحنًى مغلق، يظل مشابهًا للدائرة، لكنه مختلف. زد تشويه الدائرة، وستحصل على منحنًى مغلق يكون على نحو بديهي أكثر اختلافًا؛ «إلى حد بعيد». يمكن جعل هذه البداهة أمرًا مثبتًا، ويمكن إثبات أن فراغ الأشكال له مفهوم معقول وطبيعي للمسافة؛ أي، دالَّة مِترية.

بمجرد أن يصبح لفراغٍ ما دالة مترية، يمكننا القيام بكل أنواع الأشياء المفيدة. يمكننا، على وجه التحديد، التمييز بين التغيرات المتصلة والتغيرات غير المتصلة، ويمكننا زيادة الرهان قليلًا للتمييز بين التغيرات السلسة والتغيرات غير السلسة. وها نحن، أخيرًا، نعود إلى مشكلة تجميع تتابعات التحريك معًا. على أقل تقدير، تتيح لنا تلك الدالة في فراغ الأشكال اكتشاف حالات عدم الاتصال أو نقص السلاسة على الكمبيوتر، عن طريق أداء العمليات الحسابية المطلوبة، بدلًا من الاعتماد على العين. لكن هناك المزيد.

توجد في الرياضيات العديد من تقنيات السلاسة، التي يمكن أن تحوِّل دالة غير متصلة إلى دالة متصلة، أو دالة غير سلسة إلى دالة سلسة. لقد اكتُشف أنه يمكننا تطبيق هذه التقنيات على فراغ الأشكال. لذلك يمكنك، تلقائيًّا، تعديل تتابع مجمَّع به عدم اتصال مفاجئ للتخلص من عدم الاتصال هذا، عن طريق قيام الكمبيوتر بالعمليات الحسابية الصحيحة. هذا ليس بالأمر السهل، ولكن يمكن القيام به، ويمكن القيام به بكفاءة كافية لتوفير المال. إن مجرد حساب المسافة بين منحنيين يستخدم طرق تحسين، تشبه قليلًا تلك التي عرضناها عند الحديث عن مسألة البائع المتجول. تتضمن عملية إضفاء السلاسة في التتابع حل معادلة تفاضلية تشبه نوعًا ما معادلة فُورييه لتدفق الحرارة، التي سنعرضها في الفصلين التاسع والعاشر. الآن يُضبط تتابع متحرك كامل من المنحنيات كي «يتدفق» في تتابع متحرك مختلف، للتخلص من حالات عدم الاتصال، وهو الأمر الذي يشبه مرة أخرى تدفق الحرارة لتحقيق سلاسة موجة مُربَّعة.[5]

تتيح الصيغ المجردة المماثلة أيضًا تحويل تتابعات التحريك إلى تتابعات متشابهة، ولكن مختلفة. فيمكن تعديل تتابع يُظهر ديناصورًا يمشي لجعل الحيوان يجري. إنها ليست مجرد مسألة تسريع الحركة؛ لأن الطريقة التي يجري بها الحيوان تختلف بشكل واضح عن طريقة سيره. لا تزال هذه المنهجية في مهدها، لكنها تشير بقوة إلى أن بعض التفكير الرياضي عالي المستوى للغاية يمكن أن يوفر الكثير من الوقت في أعمال التحريك في الأفلام في المستقبل.

هذه فقط بعض الطرق التي تساهم بها الرياضيات في مجال التحريك الرُّسومي. وهناك طرق أخرى تنشئ نُسخًا مبسطة من العمليات الطبيعية لمحاكاة الأمواج في المحيط والركامات الثلجية والسُّحب والجبال. إن الهدف هو الحصول على نتائج واقعية مع إبقاء العمليات الحسابية بسيطة قدر الإمكان. وتوجد الآن نظريات رياضية عديدة حول تمثيل الوجوه البشرية. في فيلم «روج وان»، وهو أحد سلسلة أفلام «حرب النجوم»، أُعيد تجسيد

الممثلين بيتر كوشينج (الذي كان قد تُوفي عام ١٩٩٤) وكاري فيشر (التي تُوفِّيت في عام ٢٠١٦) رقميًّا عن طريق وضع وجهيهما على وجهَي اثنين من الدوبليرات. لم يكن الأمر مقنعًا على نحو جيد، واعترض المعجبون بشدة. وقد استخدمت طريقة أفضل في فيلم «الجيداي الأخير» (ذا لاست جيداي)؛ حيث اختيرت لقطات مستبعدة لفيشر من أفلام سابقة وتجميعها معًا، مع تكييف السيناريو ليلائمها. ومع ذلك، كانت لا تزال هناك حاجة إلى الكثير من الصور الرسومية المنشأة بالكمبيوتر لتغيير ملابسها، من أجل الاتساق. في الواقع، جرى تصيير كل شيء تقريبًا على نحوٍ رقمي باستثناء وجهها؛ الرأس، وطريقة تصفيف الشعر، والجسم، والملابس.[6]

تُستخدم نفس التقنيات بالفعل لصنع مقاطع «تزييف عميق» كدعاية سياسية. صوِّر شخصًا ما يُدلي بملاحظات عنصرية أو جنسية، أو يبدو وكأنه مخمور؛ ثم ضع وجه خصمك فوق وجه هذا الشخص وانشر المقطع على وسائل التواصل الاجتماعي. حتى عندما يُكشَف عن التزييف، فأنت متقدم على خصمك؛ لأن الشائعات تنتقل أسرع من الحقائق. إن الرياضيات، والتكنولوجيا التي تعتمد عليها، يمكن أن تُستخدَم في الشر مثلما تُستخدَم في الخير. ما يهم هو: كيف نستخدمها.

الفصل الثامن

الزُّنبُركات

> الزُّنبُرك جسم مرن يستعيد شكله الأصلي عند تحريره بعد ضغطه أو سحبه. ويستخدم لتخزين الطاقة الميكانيكية بتطبيق شدٍّ ثابت أو امتصاص حركة. وهو يستخدم في كل الصناعات تقريبًا، من صناعة السيارات والبناء إلى الأثاث.
>
> اتحاد الصناعة البريطانية، «نشرة المنتج: الزنبركات في أوروبا»

لقد اشترينا مؤخرًا مرتبة جديدة. ويحتوي النوع الذي اخترناه على ٥٩٠٠ زنبرك. أظهر المخطط المقطعي للمرتبة الذي شاهدناه في المتجر المتعدد الأقسام مصفوفات مكدسة من الزنبركات الملفوفة على نحو فضفاض، مع طبقة من الزنبركات الأصغر حجمًا في الأعلى. وتحتوي المراتب الفاخرة على ألفي زنبرك إضافية، داخل الطبقة الرئيسية. إن التكنولوجيا الحالية متطورة للغاية عن الأيام التي كانت فيها المرتبة تحتوي على نحو ٢٠٠ زنبرك كبير إلى حد ما وغير مريح للغاية.

إن الزنبرك هو أحد تلك الأشياء الموجودة في كل مكان، التي نادرًا ما تلاحَظ، حتى تتلف. فهناك زنبرك صمام في محركات السيارات، وزنبرك رفيع وطويل في أقلام الحبر الجاف القابلة للسحب، وزنبركات من مختلف الأشكال والأحجام في لوحات مفاتيح الكمبيوتر، ومحمِّصات الخبز، ومقابض الأبواب، والمنبهات، وأجهزة الترامبولين، والأرائك، ومشغلات أقراص البلو-راي. نحن لا نلاحظها لأنها مخفية داخل أجهزتنا وقطع أثاثنا، فنحن لا نراها بأعيننا، ومن ثَم لا ندرك وجودها وأهميتها. إن الزنبركات منتج مهم ومربح للغاية.

هل تعرف كيف يصنع الزُّنبُرك؟ أنا بالتأكيد لم أكن أعرف ذلك حتى عام ١٩٩٢، عندما رن هاتف مكتبي.

قال المتصل: «مرحبًا؟ معك لين رينولدز. أنا مهندس في جمعية بحوث ومصنعي الزنبركات في شيفيلد. لقد كنت أقرأ كتابك عن نظرية الفوضى، وقد ذكرت طريقة للعثور على شكل الجاذب الفوضوي من الملاحظات. أعتقد أنها قد تساعد في حل مشكلة واجهناها في مجال صناعة الزنبركات على مدى السنوات الخمسة والعشرين الماضية. لقد جربتها على بعض بيانات الاختبار، باستخدام جهاز كمبيوتر زد إكس ٨١ الخاص بي.»

كان زد إكس ٨١ الذي أنتجته شركة سينكلير واحدًا من أوائل أجهزة الكمبيوتر المنزلية التي تُنتَج على نطاق واسع، والذي كان يستخدم جهاز تليفزيون كشاشة وشريط كاسيت لتخزين البرمجيات. وقد كان بحجم كتاب مصنوع من البلاستيك بذاكرة رائعة تبلغ ١ كيلوبايت. ويمكنك إضافة ذاكرة خارجية حجمها ١٦ كيلوبايت من فتحة خلف الجهاز، بشرط أن تتخذ الاحتياطات اللازمة لمنع سقوطها. لقد صنعتُ إطارًا خشبيًّا لتثبيت الذاكرة المؤقتة في مكانها، واستخدم آخرون لبادة لاصقة من نوع «بلو تاك» للغرض نفسه.

إن هذا الجهاز لم يكن أحدث تقنية حَوسَبية متاحة حينها، لكن النتائج الأولية التي توصَّل إليها لين كانت واعدة بما يكفي لتأمين منحة قدرها ٩٠ ألف جنيه إسترليني (أي، حوالي ١٥٠ ألف دولار، في ذلك الوقت) من وزارة التجارة والصناعة، مع تمويلات مماثلة (كانت نوعية وليس نقدية) من مجموعة من مصنعي الزُّنبُركات والأسلاك. وقد خُصصت الأموال من أجل مشروع مدته ثلاث سنوات لتحسين اختبار مراقبة جودة الأسلاك الزنبركية، مما أدى إلى مشروعين آخرين على مدى مدة بلغت خمس سنوات. في إحدى المراحل، قُدر أن النتيجة يمكن أن توفر ١٨ مليون جنيه إسترليني (٣٠ مليون دولار) سنويًّا على صناعتَي الزنبركات والأسلاك.

هناك بالفعل الآلاف من تطبيقات الرياضيات المماثلة لحل المشكلات الصناعية، وهي تظهر طوال الوقت، دون أن يلاحظها أحد في أغلب الأحيان. والعديد منها يُعَد أسرارًا تجارية، تحميها اتفاقيات عدم الإفصاح. ومن وقت لآخر، تنشر المنظمات البريطانية، مثل مجلس أبحاث العلوم الهندسية والفيزيائية، أو معهد الرياضيات وتطبيقاتها؛ دراساتِ حالةٍ موجزة عن عدد قليل من هذه المشاريع، ويحدث الشيء نفسه في الولايات المتحدة الأمريكية وأماكن أخرى. من دون هذه المشاريع، والعديد من الاستخدامات المستهدفة

الأخرى للرياضيات من قِبل الشركات الكبيرة والصغيرة، في جميع أنحاء العالم؛ ما كان ليوجد أي من الأجهزة والأدوات التي نستخدمها كل يوم. ومع ذلك، فهو عالَم خفي، والقليل منا، حتى، يشك في وجوده.

في هذا الفصل، سأكشف النقاب عن المشاريع الثلاثة التي شاركت فيها. ليس لأنها مهمة بشكل خاص، ولكن لأنني أعرف ما تتضمَّنه. لقد نُشرت الأفكار الأساسية الخاصة بها، في الغالب في الدوريات الصناعية، وهي تندرج في نطاق الملكية العامة. وهدفي أن أوضح لكم أن الطريقة التي تُستخدم بها الرياضيات في الصناعة غالبًا ما تكون غير مباشرة ومفاجئة، مع قدر بسيط من الصدفة.

مثل مكالمة لين الهاتفية.

كانت المشكلة التي حيرت صناعتَي الأسلاك والزُّنبُركات لمدة ربع قرن بسيطةً وأساسية. تنشئ شركات تصنيع الزنبركات منتجاتها من خلال تشكيل الأسلاك التي توفِّرها شركات تصنيع الأسلاك باستخدام آلات لفٍّ معينة. وتعمل معظم الأسلاك بشكل جيد، وتنتج زنبركات في النطاقات الصحيحة من حيث الحجم والمرونة. لكن من وقت لآخر، لا تلتف شحنةٌ من الأسلاك بشكل صحيح، حتى في وجود مشغِّل ماهر للغاية. لم تستطع طرق مراقبة الجودة المعتادة في أوائل التسعينيات من القرن الماضي التمييز بين الأسلاك الجيدة والسيئة. فقد كانت تجتاز كلها نفس الاختبارات الخاصة بالتركيب الكيميائي وقوة الشد وما إلى ذلك. وعند الفحص بالعين، كان يبدو السلك السيئ تمامًا مثل السلك الجيد. ولكن عندما كان يُدخَل سلك جيد في آلة اللف، فإن ما كان يخرج هو الزنبرك الذي نريده؛ وعند إدخال السيئ، كان يبدو الناتج إما كزنبرك ولكن بحجم خاطئ، وإما في أسوأ الحالات مجرد كتلة متشابكة لا طائل منها.

إن محاولة لف السلك لم يكن اختبارًا ذا كفاءة أو فعالية. إذا كان السلك سيئًا، كان سيؤدي إلى انشغال آلة لف باهظة الثمن لبضعة أيام قبل أن يقتنع المشغِّل بأن هذه الدفعة من الأسلاك لن تصنع زنبركات أبدًا. لسوء الحظ، نظرًا لأن السلك قد اجتاز الاختبارات المعتادة، كان يمكن للشركة المصنِّعة أن تؤكد بشكل معقول أنه لا يوجد خطأ فيه؛ إذ لا بد أن هناك خطأً في إعداد آلة اللف. فأعربت الصناعتان عن أسفهما لهذا الوضع، وأرادا وسيلة موثوقًا فيها لاكتشاف من كان على حق، وكلاهما كان يريد إثبات أنه على حق. كانت النوايا الحسنة موجودة، لكنهما كانا بحاجة إلى اختبار موضوعي.

عندما بدأنا المشروع، كانت إحدى الخطوات الأولى هي أن نصطحب علماء الرياضيات إلى شركة لصناعة الزنبركات ونوضح لهم كيف يتحول السلك إلى زنبرك. يتَمَحْور الأمر كله حول الهندسة.

إن الزنبرك الأكثر شيوعًا هو زنبرك الضغط. ادفع طرفَيه أحدهما بالقرب من الآخر، وسيرتدان للخلف. إن أبسط تصميم هو الشكل الحلزوني، مثل السلم اللولبي. تخيل نقطة تدور وتدور حول دائرة بسرعة منتظمة؛ الآن أزحها بحيث تشكل زاوية قائمة مع الدائرة بسرعة منتظمة. المنحنى الذي تتبعه في الفراغ هو منحنًى حلزوني. لأسباب عملية، غالبًا ما يكون طرفا الزنبرك الحلزوني ملفوفين للداخل، كما لو كانت نقطة الحركة تدور أولًا حول دائرة في المستوى قبل البدء في التحرك بزاوية قائمة عليها، ثم تتوقف عن الحركة في هذا الاتجاه عند اللفة النهائية. هذا يحمي اللفة من تشابك طرفيها في أي شيء، كما يحمي الناس من أن يصبحوا هم هذا الشيء.

رياضيًّا، يتميَّز الشكل الحلزوني بخاصيَّتين هما الانحناء والالتواء. يقيس الانحناء درجة انثنائه. ويقيس الالتواء مقدار انحرافه عن المستوى الذي يحدده الاتجاه الذي يُثنى فيه. (من الواضح أن هناك تعريفًا تقنيًّا، ولكن دعونا لا نخوض في تفاصيل الهندسة التفاضلية للمنحنيات الفراغية.) بالنسبة إلى الشكل الحلزوني، تكون كلتا الكميتين ثابتتين. لذلك عندما تنظر إليه من الجانب، تكون اللفات متباعدة على نحو متساوٍ ومائلة بالزاوية نفسها، التي تأتي من السرعة الثابتة على طول محور الحلزون. وعندما تنظر من أحد الطرفين، فإن جميع اللفات تصطفُّ مع بعضها لتنشئ دائرة؛ هذه هي الحركة المنتظمة على نحو دائري. الدائرة الصغيرة تعني وجود انحناء كبير، في حين تعني الدائرة الكبيرة وجود انحناء صغير؛ والشكل الحلزوني الصاعد على نحو سريع يعني وجود التواء كبير، ويعني ذلك الصاعد ببطء وجود التواء صغير.

تجسد آلة اللف هاتين الخاصيتين آليًّا بطريقة بسيطة للغاية. تمرر آلة اللف السلك من بكرة كبيرة فضفاضة تُسمَّى سويفت، عبر أداة صغيرة معدنية صلبة. يؤدي هذا في الوقت نفسه إلى ثني السلك في اتجاه واحد، ويمنحه دفعة صغيرة بزاوية قائمة عليه. يؤدي الثني إلى حدوث انحناء، ويؤدي الدفع إلى حدوث التواء. ومع استمرار تلقيمها بالسلك، تخرج الآلة لفة وراء لفة من الحلزون. وعندما يصل الزنبرك للطول المطلوب، تقوم أداة أخرى بقطعه، وتصبح جاهزة لتشكيل الزنبرك التالي. وتعمل أداة إضافية على تغيير الالتواء إلى الصفر بالقرب من كل طرف لتسطيح هاتين اللفتين ولفهما للداخل.

تكون تلك العملية سريعة، وتنتج عدة زنبركات في الثانية. وقد صنعت إحدى الشركات زنبركات صغيرة من سلك خاص بمعدل ١٨ زُنبُرُكًا في الثانية على كل آلة لف.

تعد شركات صناعة الأسلاك والزنبركات عمومًا شركات صغيرة نسبيًّا، أو تقنيًّا، شركات صغيرة ومتوسطة الحجم. إنها محاصرة بين موردين كبار، مثل شركة بريتيش ستيل، وعملاء كبار، مثل شركات السيارات والمراتب، مما يقلص من هوامش ربحها بشكل كبير. ومن أجل الاستمرار في السوق، يجب أن تظل على درجة عالية من الكفاءة. ولن يمكن لأي شركة من هذه الشركات بمفردها تحمُّلُ تكلفة وجود قسم أبحاث خاص بها، لذا فهي تعتمد على جمعية بحوث ومصنعي الزنبركات، التي تغيَّر اسمها لاحقًا إلى معهد تكنولوجيا الزنبركات، والتي هي بمنزلة كيانٍ مشتركٍ للبحث والتطوير، في مشروع تعاوني تموله الشركات الأعضاء فيه. وكان لين وزملاؤه قد حققوا في تلك الجمعية بالفعل بعض التقدم في مشكلة اللف، بناءً على تحليل ما يحدث من أخطاء. يعتمد انحناء والتواء لفات الزنبرك على الخصائص المادية للسلك، مثل المطاوعة؛ التي تعني مدى سهولة أو صعوبة ثَنْيه. عندما تشكل اللفات شكلًا حلزونيًّا منتظمًا، فهذا يرجع إلى أن هذه الخصائص منتظمة على طول السلك. وعندما لا تكون تلك الخصائص كذلك، فلن يُنتَج زُنبرك جيد. لذلك بدا من المحتمل أن ضعف قابلية الالتفاف ناتج عن التبايُن غير المنتظم لهذه الخصائص على طول السلك. إذن أصبح السؤال هو: كيف نكتشف مثل هذه التبايُنات؟

كانت الإجابة هي إجبار السلك على الالتفاف بلفِّه حول قضيب معدني، مثل لف مكرونة الاسباجيتي حول شوكة. ثم يمكننا قياس المسافات بين اللفات المتتالية. إذا كانت جميعها متساوية إلى حد كبير، إذن هذا سلك جيد. وإذا كانت غير متساوية، فهذا سلك سيئ. إلا أنه في بعض الأحيان يمكن أن تختلف كثيرًا ويظل السلك صالحًا لصنع الزنبركات. ربما ليس بنفس دقة السلك الجيد حقًّا، ولكنه جيد بما يكفي لبعض التطبيقات. لذا كان جوهر المشكلة هو: كيف يمكننا تحديد إلى أي مدًى يكون السلك «سيئًا»؛ بتعيين عدد معين لذلك؟

طبق مهندسو الجمعية جميع الأدوات الإحصائية المعتادة على قائمة القياسات، ولكن لا شيء تَوافق بدقة عالية مع قابلية الالتفاف. وهنا جاء الدور الذي لعبَه كتابي عن نظرية الفوضى.

إن نظرية الفوضى، وهو اسم اخترعته وسائل الإعلام، معروفة بشكل أفضل لعلماء الرياضيات كجزء من النظرية الأوسع للديناميكا غير الخطية، التي تدور حول كيفية

تصرف الأنظمة عندما يكون سلوكها خلال زمنٍ محكومًا بقاعدة رياضية محددة. قِس حالة النظام الآن، وطبق القاعدة، واستنتج الحالة لمدة زمنية صغيرة في المستقبل. ثم كرر الأمر. مع مرور الزمن، يمكنك حساب حالة النظام بقدر ما تريد في المستقبل. هذا الأسلوب هو الديناميكا. بوجه عام، تعني كلمة «غير خطية» أن القاعدة لا تجعل فقط الحالة المستقبلية متناسبة مع الحالة الحالية فقط، أو مع الاختلاف بين الحالة الحالية وحالة مرجعيةٍ ما. بالنسبة للزمن المتغير باستمرار، تُحدد القاعدة بواسطة معادلة تفاضلية، تربط معدَّل تغيُّر متغيرات النظام بقيمها الحالية.

هناك أيضًا نسخة متقطعة يمرر فيها الزمن خطوة بخطوة، والموصوفة بمعادلة فرقية: الحالة بعد خطوة واحدة هي ما يحدث للحالة الحالية عند تطبيق القاعدة. إن تلك النسخة هي التي تحل مشكلة اللف. لحسن الحظ، هذه هي أسهل واحدة يمكن فهمها. وهي تعمل كالتالي:

الحالة عند الزمن ٠ ⟵ الحالة عند الزمن ١ ⟵ الحالة عند الزمن ٢ ⟵ …

حيث يعني السهم «طبق القاعدة». على سبيل المثال، إذا كانت القاعدة «ضاعف العدد» وبدأنا بالحالة الأولية التي تساوي ١، فإن الخطوات المتتالية تُنتِج تسلسل الحالات ١، ٢، ٤، ٨ وهكذا، التي تتضاعف في كل مرة. هذه قاعدة خطية؛ لأن الناتج يتناسب مع المدخلات. لكن قاعدة مثل «أوجد مربع العدد واطرح منه ٣» غير خطية، وفي هذه الحالة تُنتِج تسلسل الحالات الآتي:

١ ⟵ −٢ ⟵ ١ ⟵ −٢ ⟵ …

الذي يكرر نفس العددين مرارًا وتكرارًا. هذه ديناميكا «دورية»، وهي تشبه كثيرًا دورة الفصول، على سبيل المثال. والسلوك المستقبلي يمكن التنبؤ به تمامًا، في ضوء الحالة الأولية: إنها تبدل فقط بين ١ و−٢.

من ناحية أخرى، إذا كانت القاعدة «أوجد مربع العدد واطرح منه ٤»، فسنحصل على الآتي:

١ ⟵ −٣ ⟵ ٥ ⟵ ٢١ ⟵ ٤٣٧ ⟵ …

وستستمر الأعداد في التزايد أكثر فأكثر (باستثناء الثاني). لا يزال التسلسل قابلًا للتوقع؛ فقط استمر في تطبيق القاعدة. ونظرًا لأن القاعدة حتمية — أي، لا تحتوي على سمات

عشوائية — تُحدد كل قيمة متتالية بشكل متفرد من خلال القيمة السابقة؛ لذلك يمكن التنبؤ على نحو تام بـ «المستقبل بأكمله».

الشيء نفسه ينطبق على النُّسخ ذات الزمن المستمر، على الرغم من أن القدرة على التنبؤ ليست واضحة في هذه الحالة. ويُسمى تسلسل الأعداد من هذا النوع بالمتسلسلة الزمنية.

متأثرين بأعمال جاليليو جاليلي ونيوتن، توصَّل علماء الرياضيات والعلماء إلى قواعد لا حصر لها من هذا النوع، مثل قاعدة جاليليو الخاصة بموضع جسم يسقط بفعل الجاذبية وقانون الجاذبية لنيوتن. أدت هذه العملية إلى الاعتقاد بأن أي نظام ميكانيكي يخضع لقواعد حتمية، لذلك يمكن التنبؤ به. ومع ذلك، اكتشف عالم الرياضيات الفرنسي الكبير أونري بوانكاريه ثغرةً في هذه الحجة، وقد نشرها في عام ١٨٩٠. إن قانون نيوتن للجاذبية يشير إلى أن أي جسمين سماويين، مثل نجم وكوكب، يتحركان في مدارين إهليلجيَّين حول مركز كتلتهما المشترك، وهو في هذه الحالة يكون عادةً داخل النجم. وتكون الحركة دورية، والدورة هي الزمن الذي يستغرقه الدوران مرة واحدة والعودة إلى موضع البداية. بحث بوانكاريه فيما يحدث إذا كانت هناك ثلاثة أجسام (شمس، وكوكب، وقمر)، ووجد أنه في بعض الحالات تكون الحركة غير منتظمة للغاية. أدرك علماء الرياضيات اللاحقون، الذين تابعوا هذا الاكتشاف مؤخرًا، أن هذا النوع من عدم الانتظام يجعل مستقبل مثل هذا النظام غير قابل للتوقع. إن الثغرة في «الإثبات» الخاص بإمكانية التنبؤ هي أنه صالحٌ فقط عندما يمكننا قياس الحالة الأولية وإجراء جميع العمليات الحسابية بدقة تامة؛ أي تكون دقيقة لعدد لا نهائي من المواضع العشرية. بخلاف ذلك، حتى التناقضات الصغيرة جدًّا يمكن أن تتزايد بسرعة هائلة، حتى تغمر القيمة الصحيحة.

هذه هي الفوضى أو، على وجه الدقة، الفوضى الحتمية. حتى عندما تعرف القواعد، وهي لا تحتوي على سمات عشوائية، فقد لا يمكن التنبؤ بالمستقبل من الناحية العملية، حتى لو أمكن التنبؤ به من الناحية النظرية. في الواقع، يمكن أن يكون السلوك غير منتظم لدرجة أنه يبدو عشوائيًّا. وفي نظام عشوائي حقًّا، لا توفر الحالة الحالية أي معلومات حول الحالة التالية. في النظام الفوضوي، توجد أنماط خفية. والأنماط السرية وراء الفوضى هي أنماط هندسية، ويمكن تصوُّرها من خلال رسم حلول للمعادلات النموذجية على هيئة منحنيات في الفراغ الذي إحداثياته عبارة عن متغيرات الحالة. في

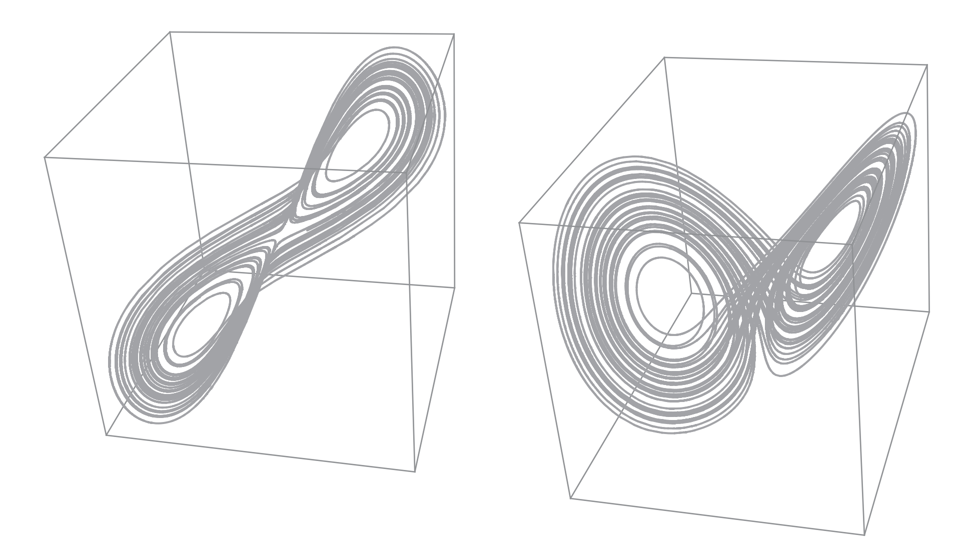
بعض الأحيان، إذا انتظرت بعض الوقت، تبدأ تلك المنحنيات في رسم شكل هندسي معقَّد. إذا كانت المنحنيات من نقاط بداية مختلفة ترسم جميعها الشكل نفسه، فإننا نطلق على الشكل اسم «جاذب». يميز الجاذب الأنماط الخفية في السلوك الفوضوي.

أحد الأمثلة القياسية على ذلك هو معادلات لورنز، وهي نظام ديناميكي ذو زمن مستمر يمثل نموذجًا لغاز الحمل الحراري، مثل الهواء الساخن في الغلاف الجوي. هذه المعادلات لها ثلاثة متغيرات. في مخططٍ لكيفية تغيرها، باستخدام نظام إحداثيات ثلاثي الأبعاد، ينتهي الأمر بمنحنيات الحل بالتحرك على طول شكل يُشبه إلى حدٍّ ما القناع؛ جاذب لورنز. وتنشأ الفوضى لأنه على الرغم من أن منحنيات الحل تتحرك حول هذا الجاذب (أو بالقرب جدًّا منه)، فإن الحلول المختلفة تتحرك بطرق مختلفة جدًّا. يمكن لأحدها (مثلًا) أن يلتفَّ ست مرات حول الحلقة اليسرى وخمس مرات حول الحلقة اليمنى؛ قد يلتف منحنًى قريبٌ ثماني مرات حول الحلقة اليسرى ثم ثلاث مرات حول الحلقة اليمنى، وهكذا. لذا فإن المستقبل المتوقع لهذه المنحنيات مختلف تمامًا، على الرغم من أنها تبدأ من قيم متغيرات متشابهة جدًّا.

ومع ذلك، فإن التنبؤات قصيرة المدى أكثر موثوقية. في البداية، يظل منحنيان متجاوران قريبين أحدهما من الآخر. فقط في وقت لاحق يبدآن في التباعد. لذلك يمكن التنبؤ بالنظام الفوضوي على المدى القصير، على عكس النظام العشوائي على نحو حقيقي، الذي لا يمكن التنبؤ به على الإطلاق. هذا أحد الأنماط الخفية التي تميز الفوضى الحتمية عن العشوائية.

عندما نعمل مع نموذج رياضي معين، فإننا نعرف جميع المتغيرات، ويمكننا استخدام الكمبيوتر لحساب كيفية تغيرها. يمكننا تصور الجاذب عن طريق رسم هذه التغييرات في الإحداثيات. عند مراقبة نظام حقيقي قد يكون فوضويًّا، فإن هذه الرفاهية ليست متاحة دائمًا. في أسوأ الحالات، قد نتمكن من قياس متغيِّر واحد فقط. ونظرًا لأننا لا نعرف المتغيرات الأخرى، فلا يمكننا رسم الجاذب.

وهنا يأتي دور رؤية لين. لقد ابتكر علماء الرياضيات طُرقًا بارعة «لإعادة بناء» الجاذب من قياسات متغيِّر واحد. أبسطها طريقة باكارد-تيكنز أو ما يُسمى بطريقة النافذة المنزلقة، التي طورها نورمان باكارد وفلوريس تيكنز. وهي تقدم متغيرات «وهمية» جديدة عن طريق قياس المتغير نفسه، ولكن في أزمنة مختلفة. لذا فبدلًا من المتغيرات الثلاثة الأصلية في أوقاتٍ متزامِنة، ننظر إلى متغير واحد فقط ضمن نافذة طولها



الشكل الأيمن: جاذب لورنز. الشكل الأيسر: إعادة بناء الطوبولوجيا الخاصة به باستخدام متغير واحد.

ثلاث خطوات زمنية. ثم نحرك النافذة بطول خطوة واحدة ونفعل الشيء نفسه، ونكرر العملية عدة مرات. يوضح الشكل الأيسر كيف يعمل هذا مع جاذب لورنز. إنه مختلف عن الشكل الأيمن، ولكن ما لم تختر الخطوة الزمنية بشكل سيئ للغاية، فإن الصورتين سيكون لهما نفس الطوبولوجيا؛ الجاذب المعاد بناؤه هو نسخة مشوهة باستمرار من الجاذب الفعلي. هنا، تبدو كلتا الصورتين وكأنهما قناعان، مع فتحتين للعين، لكن إحداهما نسخة ملتوية من الأخرى.

توفِّر هذه الطريقة صورة نوعية للجاذب، تخبرنا عن نوع الفوضى المتوقَّع. لذا، عندما تساءل لين عما إذا كانت الحيلة نفسها ستنجح على بيانات الزُّنبُركات الخاصة به، رسم مخططًا ثنائي الأبعاد يعالج الفجوات المتتالية بين اللفات كمتسلسلةٍ زمنية، ويطبق طريقة إعادة بناء النافذة المنزلقة. ومع ذلك، لم يحصل على شكل هندسي واضح مثل القناع؛ ما حصل عليه كان سحابة غامضة من النقاط. يشير هذا إلى أن تسلسل الفجوات ربما لم يكن فوضويًّا بالمعنى التقني الذي يستخدمه علماء الرياضيات.

إذن لم تكن الطريقة مجدية؟

مطلقًا.

ما لفت انتباه لين كان هو الشكل العام لتلك السحابة الغامضة. كان قد جرى اختبار عينات الأسلاك بعناية شديدة على آلة اللف، لذلك كان يعرف أي العينات جيد أو سيئ أو متوسط الجودة. هل كان يمكن أن تحدد سحابة النقاط المعاد بناؤها مدى جودة كل عينة؟ على ما يبدو، كان يمكنها فعل ذلك. عندما كان السلك جيدًا حقًّا، ويلتف بسهولة ويصنع زُنبُركات دقيقة للغاية، كانت السحابة صغيرة وتقريبًا دائرية. وعندما كان السلك متوسط الجودة، يمكن لفه بسهولة إلى حد ما، ولكن يصنع زنبركات ذات أحجام متغيرة أكثر، كانت السحابة أكبر، لكنها لا تزال تقريبًا دائرية. في المقابل، عندما كان السلك سيئًا، ومن المستحيل لفه ليصنع زُنبركات، كانت السحابة طويلة ورفيعة، مثل السيجار.

إذا استمر النمط نفسه في عينات أخرى، فيمكننا تخطي الاختبار البطيء والمكلِّف على آلة اللف، واستخدام شكل وحجم السحابة الغامضة لتحديد السلك الجيد والمتوسط الجودة والسيئ. هذا من شأنه أن يحل المشكلة العملية المتمثلة في إيجاد اختبار رخيص وفعَّال لقابلية الالتفاف. لا يهم في الواقع ما إذا كان تباعد اللفات عشوائيًّا أو فوضويًّا أو مزيجًا من كليهما. ليس علينا أن نعرف بالضبط كيف تتباين الخصائص المادية على طول السلك، أو حتى ما هي تلك الخصائص. لا يتعين علينا بالتأكيد إجراء حسابات معقدة للغاية في نظرية المرونة، التي جرى التحقُّق منها عبر تجارب معقدة بالقدر نفسه، لفهم كيفية ترجمة هذه التباينات إلى قابلية لفٍّ جيدة أو سيئة. كل ما نحتاج إلى معرفته هو كيف يميز مخطط النافذة المنزلقة السلك الجيد من السيئ، ويمكننا التحقق من ذلك عن طريق اختباره على المزيد من عينات الأسلاك ومقارنة النتائج بأدائها على آلة اللف.

أصبح الآن واضحًا سبب عدم فائدة المقاييس الإحصائية القياسية للبيانات، مثل الوسيط (المتوسط) والتباين (الانتشار). تتجاهل هذه المقاييس الترتيب الذي تظهر به البيانات: كيف يرتبط كل تباعد بالتباعد السابق عليه. إذا غيرت أماكن الأعداد، فلن يتغير المتوسط والتباين، ولكن شكل سحابة النقاط يمكن أن يتغير على نحو كبير. وهذا، على الأرجح، هو مفتاح صنع الزُّنبُركات الجيدة.

لبحث هذه الرؤية، بنينا آلةً لمراقبة الجودة، «فراكمات» (FRACMAT)، التي تدور دورة الاختبار حول قضيب معدني، ثم تمسحها ضوئيًّا باستخدام ميكرومتر ليزر لقياس الفجوات المتتالية، ثم تُدخل هذه الأعداد في جهاز كمبيوتر، ثم تطبق طريقة إعادة بناء النافذة المنزلقة للحصول على سحابة من النقاط، ثم تُقدر الشكل الإهليلجي الأنسب

لمعرفة ما إذا كان دائريًّا أو على شكل سيجار ومدى حجمه، ثم تحدد مدى جودة أو سوء عينة السلك. لقد كان هذا تطبيقًا عمليًّا لنظرية الفوضى، وخاصة طريقة إعادة البناء، على مسألة ربما لم تكن حتى فوضوية بالمعنى التقني. على نحو ملائم، إن تمويل وزارة التجارة والصناعة لم يكن للبحث، ولكن لنقل التكنولوجيا؛ فقد نقلنا طريقة إعادة البناء من رياضيات الديناميكا الفوضوية إلى متسلسلة زمنية من الملاحظات لنظام واقعي من المحتمل أن يكون غير فوضوي. وهو بالضبط ما قلنا لهم إننا سنفعله.

الفوضى ليست مجرد مرادف منمَّق لكلمة «عشوائي». فالفوضى قابلة للتوقع على المدى القصير. إذا ألقينا حجَرَ نرد، فإن الرمية الحالية لا تخبرنا بأي شيء عما سيحدث بعد ذلك. فأيًّا كان ناتج الرمية هذه المرة، فإنه من المحتمل ظهور أي من الأعداد الستة في المرة القادمة. هذا بافتراض أن حجر النرد عادل، وليس مُعدَّلًا لزيادة احتمالية ظهور عدد محدد. لكن الفوضى مختلفة. إذا كانت الفوضى حجر نرد، لكانت هناك أنماط. ربما يمكن أن يلي ظهور العدد ١ ظهور العدد ٢ أو ٥ فقط، بينما يلي ظهور العدد ٢ ظهور العدد ٤ أو ٦ فقط، وهكذا. يمكن توقع النتيجة التالية إلى حد ما، لكن الرمية الخامسة أو السادسة من الآن يمكن أن تصبح أي عدد من الستة. كلما أردت أن تعرف المزيد عن المستقبل، زادت درجة عدم اليقين في التنبؤ.

لقد نشأ المشروع الثاني، «ديناكون» (DYNACON)، من المشروع الأول عندما أدركنا أنه قد يكون من الممكن استغلال هذه القدرة القصيرة المدى على التنبؤ الخاصة بالفوضى للتحكم في آلة اللف. إذا تمكنَّا بطريقةٍ ما من قياس أطوال الزُّنبركات أثناء إنتاجها، وتحديد الاتجاهات في الأعداد التي تشير إلى أن الآلة كانت تتصرف حقًّا بطريقة فوضوية، فقد يكون من الممكن توقع ظهور الزنبركات السيئة وضبط الآلة لمواجهة ذلك. كان المصنعون قد وجدوا بالفعل طُرقًا لقياس الطول أثناء صنع الزنبرك، لتحويل الزنبركات غير الدقيقة إلى حاوية منفصلة، لكننا أردنا المزيد. فنحن لم نُرِد فقط أن نفرز الزنبركات السيئة وهي تُصنع، ولكن أن نمنع صنعها من الأساس. صحيح أننا لم نكن نسعى للكمال في هذا الشأن، ولكننا كنا نسعى لتجنب إهدار الكثير من الأسلاك.

يتعلق جانب كبير من الرياضيات بالدقة. إن عددًا ما يساوي (أو لا يساوي) ٢. وهذا العدد ينتمي (أو لا ينتمي) إلى مجموعة الأعداد الأولية. لكن غالبًا ما يكون العالم الحقيقي أكثر ضبابية. قد يكون قياسٌ ما قريبًا من العدد ٢ ولكن لا يساويه تمامًا؛ علاوة

على ذلك، إذا قسنا الكمية نفسها مرة أخرى، فقد تكون النتيجة مختلفة قليلًا. وعلى الرغم من أن عددًا ما لا يمكن أن يكون «شِبهَ عدد أولي»، فإنه بالتأكيد يمكن أن يكون «شِبه عدد صحيح». هذا الوصف مقبول لعدد مثل ١٫٩٩ أو ٢٫٠١، على سبيل المثال. في عام ١٩٦٥ صاغ لُطفي زاده وديتر كلاوا بشكل مستقل وصفًا رياضيًّا دقيقًا لهذا النوع من الضبابية، المعروف باسم نظرية المجموعات الضبابية، جنبًا إلى جنب مع المفهوم المرتبط بها والخاص بالمنطق الضبابي.

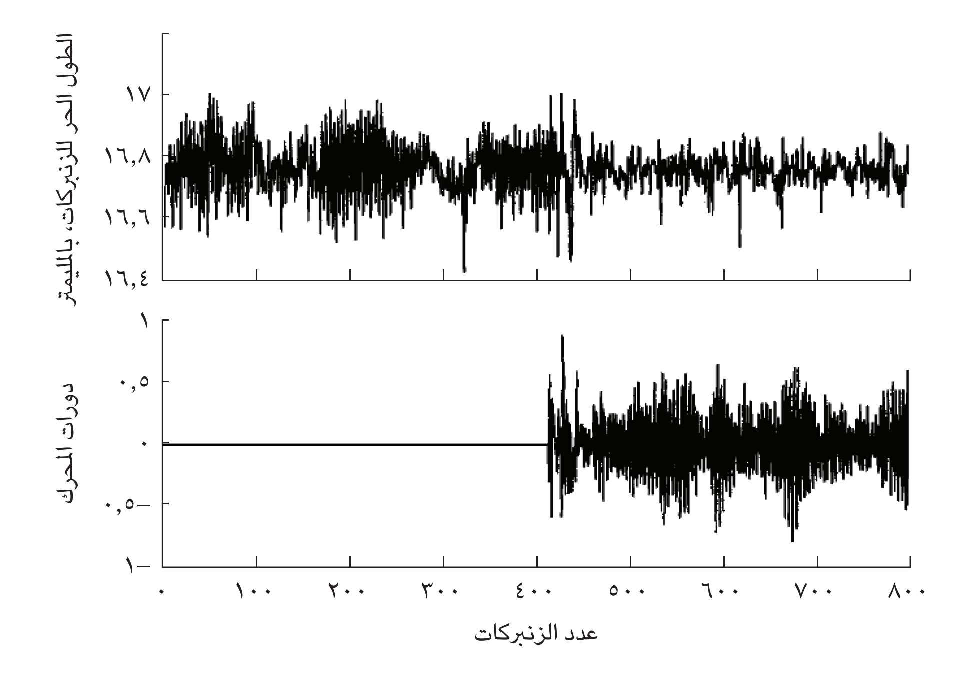
في نظرية المجموعات التقليدية، ينتمي العنصر (مثل عددٍ ما) إلى مجموعة محددة أو لا ينتمي إليها. في نظرية المجموعات الضبابية، يوجد مقياس عددي دقيق يحدد «مدى» انتمائه إليها. لذلك قد ينتمي العدد ٢ إلى المجموعة بمقدار النصف، أو بمقدار الثلث. إذا كان هذا المقياس هو ١، فإن العدد ينتمي بالتأكيد إلى المجموعة، وإذا كان العدد ٠، فهو لا ينتمي بالتأكيد. مع ٠ و١ فقط لدينا نظرية المجموعات التقليدية. إذا سمحنا بأي مقياس بين ٠ و١، فإن درجة العضوية الضبابية توضح المنطقة الرمادية بين هذين النقيضين.

سارع بعض علماء الرياضيات البارزين إلى رفض الفكرة، إما بزعم أن نظرية المجموعات الضبابية هي مجرد نظرية احتمال متخفية، أو المجادلة بأن منطق معظم الناس ضبابي بدرجة كافية دون الإصرار على أن الرياضيات يجب أن تسير بالطريقة نفسها. إن ما يحفِّز، على وجه التحديد، بعضَ الأكاديميين على أن يكونوا رافضين على الفور للأفكار الجديدة يحيرني للغاية، خاصة عندما تكون أسبابهم لفعل ذلك غير منطقية. لم يكن أحدٌ يقترح استبدال المنطق الضبابي بالمنطق القياسي. لقد جرى تقديم الأول فقط كسلاح آخَر في خزانة الأسلحة. وعلى الرغم من أن المجموعات الضبابية تبدو ظاهريًّا وكأنها احتمال، فإن القواعد مختلفة، وكذلك التفسير. فإذا كان عدد ما ينتمي إلى مجموعة باحتمال ١ / ٢، وكنت من أنصار الاحتمال المتكرر، فأنت تقول إنه إذا كررنا التجربة عدة مرات، فسيكون العدد في المجموعة حوالي نصف الوقت. وإذا كنت من أنصار الاحتمال البايزي، فإن ثقتك في أن العدد ينتمي إلى المجموعة هي ٥٠٪. لكن في نظرية المجموعات الضبابية، لا يوجد عنصر احتمال. العدد موجود بالتأكيد في المجموعة، لكن المدى الذي ينتمي به إليها ليس ١. إنه بالضبط ١ / ٢. أما بالنسبة للزعم بأنه منطق سيئ؛ فالمنطق الضبابي له قواعد محددة، وأي حجة تستخدمه إما صحيحة أو لا، اعتمادًا على ما إذا كانت قد التزمت بهذه القواعد أم لا. أظن أن كلمة «ضبابية» قادت بعض الناس إلى الافتراض، دون عناء الاستكشاف، أن القواعد نفسها كانت طيِّعة وسيئة التعريف. لكن ليس الأمر كذلك.

هناك أمر آخر، لا شك أنه زاد الارتباك، وهو إلى أي مدى ستضيف المجموعات الضبابية والمنطق الضبابي أي شيء ذي قيمة للرياضيات. فمن السهل جدًّا إعداد أنظمة صورية كبيرة أفضل قليلًا من مجموعات صيغ خالية من المحتوى؛ أي «الهراء المجرد». أظن أنه كان من المغري للغاية أن أنظر إلى فكرة زادَهْ على هذا النحو، خاصة أن الأساسيات لم تكن عميقة أو صعبة. الآن، قد تكون التجربة هي أصدق برهان، لكن قيمة الفكرة الرياضية يمكن تقييمها بعدة طرق، إحداها فقط هي عمقها الفكري. وهناك طريقة أخرى، وهي إلى حد ما وثيقة الصلة بهذا الكتاب، وهي مدى المنفعة التي تقدمها. وقد تبين أن العديد من الأفكار الرياضية التافهة تقريبًا مفيدة للغاية. خذ مثلًا التمثيل العشري. إنه فكرة رائعة ومبتكَرة وبارعة وتُغير قواعد اللعبة، ولكنها ليست عميقة. فيمكن للطفل أن يفهمها.

ربما يفشل المنطق الضبابي ونظرية المجموعات الضبابية فيما يتعلق بمعيار العمق الفكري، على الأقل بالمقارنة مع فرضية ريمان أو مبرهَنة فيرما الأخيرة. لكنهما أثبتا أنهما مفيدان للغاية بالفعل. إنهما يثبتان كفاءتهما عندما لا نكون متأكدين تمامًا من دقة المعلومات التي نراقبها. فتُستخدم الرياضيات الضبابية الآن على نطاق واسع في مجالات متنوعة مثل اللغويات وصنع القرار وتحليل البيانات والمعلوماتية الحيوية. وهي تستخدم عندما تؤدي المهمة المطلوبة بشكل أفضل من أي بديل آخر، ويمكننا تجاهلها بأمان عندما لا تفعل ذلك.

لا أريد الخوض في تفاصيل نظرية المجموعات الضبابية، التي ليست ضرورية حقًّا لتقدير أهمية مشروعنا الثاني. لقد جربنا عدة طرق للتنبؤ بالوقت الذي تكون فيه آلة اللف على وشك إنتاج زُنبُركات سيئة، لضبطها للتعامل مع ذلك. إحدى الطرق معروفة في هذا المجال باسم نموذج المعرِّف الضبابي تاكاجي-سوجينو، المسمى على اسم المهندسَين توماهيرو تاكاجي وميتشيو سوجينو.[1] وهي تطبق، باستخدام الطرق الدقيقة للرياضيات الضبابية، أنظمة قواعد، هي في حد ذاتها ضبابية. في هذه الحالة، تأخذ القواعد الشكل «إذا كان القياس (الضبابي بالضرورة) لطول الزنبرك الحالي هو X، فافعل Y لضبط آلة اللف». وتأخذ القواعد أيضًا في الاعتبار الضبط السابق، جنبًا إلى جنب مع تقدير الاضطرابات الناجمة عن الخصائص المادية المتغيرة للسلك، وبلاء الآلة، وما إلى ذلك. جميع البيانات تكون ضبابية، وكذلك الإجراءات التي نتخذها؛ يتعامل التركيب الرياضي مع هذا تلقائيًّا لضبط آلة اللف أثناء التشغيل.



تأثير تشغيل نظام تحكم الضبط الذاتي الضبابي. إن عدد الزنبرك يمتد من اليسار إلى اليمين. الشكل العلوي: أطوال الزنبركات المَقِيسة. الشكل السفلي: نشاط نظام التحكم، مقيس بعدد مرات دوران المحرك المتحكم. الزنبركات ١–٤٠٠ دون تحكم، والتباين في الطول عالٍ. جرى لف الزنبركات ٤٠١–٨٠٠ مع تشغيل وحدة التحكم: يصبح التباين أصغر بشكل واضح.

بالنسبة لمشروع الشريط المعدني الخاص بنا، جربنا ثلاث طُرق تحكم مختلفة. أولًا: شغلنا الآلة مع إيقاف تشغيل نظام التحكم، لإنشاء أساس يمكن من خلاله الحكم على مدى فعالية أي نظام تحكُّم آخر. ساعدت البيانات التي حصلنا عليها أيضًا في تقدير البارمترات المختلفة في النماذج الرياضية. بعد ذلك، شغلناها باستخدام نظام تحكم متكامل، يستخدم صيغة رياضية ثابتة للتنبؤ بالتغيُّر في الضبط من لفة إلى أخرى. أخيرًا، استخدمنا نظام تحكم ضبط ذاتي ضبابي، يضبط قواعده الخاصة على نحو فوري وفقًا لأطوال الزنبرك المرصودة. عندما فعلنا ذلك مع أسلاك الفولاذ الكربوني، كان الانحراف المعياري لأطوال الزنبرك — وهو مقياس لمدى تبايُنها — ٠٫٠٧٧ دون تحكم، و٠٫٠٦٥

مع تحكم متكامل، و٠٫٠٣٩ مع ضبط ذاتي ضبابي. إذن فإن الطريقة القائمة على المنطق الضبابي عملت على نحو أفضل، وخفضت التباين إلى النصف.

هناك مبدأ أساسي آخر في الرياضيات، وهو أنه بمجرد أن تجد شيئًا يؤدي المهمة المطلوبة، استفِد منه لأقصى درجة. غالبًا ما يمكن استغلال فكرة ذات قيمة مثبتة في ظروف ذات صلة ولكن مختلفة. لقد عاد مشروعنا الثالث، وهو أيضًا جزء من مشروع «ديناكون»، إلى آلة «فراكمات»، لكننا عدلنا جهاز الاختبار ليناسب صناعة تشبه صناعة الزنبركات، ولكنها تستخدم شريطًا معدنيًّا بدلًا من السلك.

من المؤكد أن لديك في منزلك بعض منتجات صناعة الأشرطة المعدنية. في المملكة المتحدة، يحتوي كل قابس كهربائي على منصهر مثبت بمِشبكين نحاسيَّين. هذه المشابك مصنوعة من بكرة كبيرة من شريط نحاسي رفيع وقليل العرض. تلقم آلة الشريط المعدني عبر سلسلة من الأدوات مُرَتَّبة في شكل شبه دائري، وكلها تشير إلى المركز حيث يمر الشريط. كل أداة تصنع انحناءً واحدًا في الشريط، بزاوية وموضع معينين، أو تثقب ثَقبًا، أو تنفذ أي عملية أخرى مطلوبة. أخيرًا، تقطع أداة قطع المشبك بعد الانتهاء من تصنيعه، الذي يسقط في حاوية. يمكن لآلة قياسية أن تصنع عشرة مشابك أو أكثر كل ثانية.

تُستخدم العملية نفسها لصنع مجموعة كبيرة من الأجسام المعدنية الصغيرة. وتتخصَّص إحدى الشركات البريطانية في صنع المشابك التي تربط دعامات الأسقف المعلقة، وتنتج مئات الآلاف منها كل يوم. ومثلما يواجه صانعو الزنبركات مشاكل في تقييم ما إذا كان السلك سيلتفُّ جيدًا أم لا، فإن صانعي المشابك يواجهون مشاكل في تقييم ما إذا كانت عينة معينة من الشريط ستَنثني بالطريقة المقصودة. مصدر المشكلة مماثل: الخصائص المادية المتغيرة، مثل المطاوعة، على طول الشريط. لذلك بدا من المعقول تجربة نفس طريقة إعادة بناء النافذة المنزلقة على الشريط المعدني.

ومع ذلك، ليس من المعقول محاولة إجبار الشريط المعدني على صنع لفات. إنه الشكل الخاطئ للقيام بذلك بسهولة، واللف له صلة قليلة بالطريقة التي تُصنع بها المشابك. إن الكمية الرئيسية هي مقدار انثناء الشريط تحت تأثير قوة مطبقة معينة. لذلك، بعد الكثير من التفكير، أعدنا تصميم آلة الاختبار، وتوصَّلنا إلى شيء أبسط بكثير. لقم الشريط بين ثلاث أسطوانات، بحيث تجبره تلك الموجودة في المنتصف على الانثناء. ثم اترك الأسطوانة التي في المنتصف تتحرك قليلًا، على زنبرك صلب، ثم قِس المسافة التي

تتحرك بها بينما يمر الشريط تحتها. ينثني الشريط ثم يُسوَّى مرة أخرى، ويمكننا قياس القوة المطلوبة لثَنيه. إذا اختلفت مطاوعة الشريط عبر طوله، فهكذا الحال بالنسبة لهذه القوة.

بدلًا من القياسات المنفصلة لتباعُد لفات السلك، التي تُجرى بواسطة ميكرومتر ليزر، لدينا الآن قياسات متصلة للقُوى. تقيس الآلة أيضًا الاحتكاك السطحي، الذي تبيَّن أن له تأثيرًا مهمًّا على الجودة. ومع ذلك، فإن تحليل البيانات لم يتغير إلى حد كبير. كما أن آلة الاختبار هذه أصغر من آلة «فراكمات» وأبسط في الصنع، والجيد أن الاختبار لا يؤدي إلى خسائر؛ إذ يرجع الشريط إلى حالته الأولية، ويمكن استخدامه في التصنيع إذا أردنا.

ماذا تعلَّمنا؟

ربما وفرنا لشركات صناعة الأسلاك والزنبرك الكثير من النقود، لذلك تعلَّمنا أن هذا النوع من تحليل البيانات الرياضية له قيمة مالية كبيرة. إلى حدٍّ ما، أقنع مجرد وجود آلة «فراكمات» صانعي الأسلاك بتحسين إجراءات الإنتاج الخاصة بهم، الأمر الذي بدوره ساعد صانعي الزُّنبركات. لا تزال آلات الاختبار قيد الاستخدام، ويستمر معهد تكنولوجيا الزنبركات في القيام بدوره موردًا مشتركًا للعديد من الشركات الصغيرة؛ إذ يتولَّى عمليات الاختبار من أجلها.

كما تعلَّمنا أن طريقة إعادة بناء النافذة المنزلقة يمكن أن تكون مفيدة حتى عندما لا تنتج البيانات عن نظام ديناميكي فوضوي لطيف وبسيط ودقيق رياضيًّا. هل الخصائص المادية للأسلاك تتباين على نحو فوضوي بالمعنى التقني؟ نحن لا نعرف. لم نكن في «حاجة» إلى معرفة ذلك كي نصنع آلية وآلة الاختبار الجديدتين. فلا يقتصر تطبيق الأساليب الرياضية على السياق المحدد الذي طُوِّرت من أجله في الأصل. إنها قابلة للتطبيق في سياقات أخرى عديدة.

لقد تعلمنا كذلك أنه في بعض الأحيان عندما نحاول نقل حيلة تعمل في سياق ما، كي نستخدمها في سياق جديد — مثل التحكم — فإنها لا تؤدي المهمة. وعندئذٍ عليك أن تبحث عن طُرق مختلفة تؤدي المهمة، مثل المنطق الضبابي.

وتعلمنا أيضًا أن هذا النوع من النقل يعمل بشكل جيد حقًّا في بعض الأحيان. على نحو أفضل، في بعض النواحي، من المحاولة الأولى. حيث تعمل آلتُنا الخاصة بالشريط المعدِني أيضًا على الأسلاك، وهي غير مهدرة للخامات.

وأفضل ما تعلَّمناه هو أنه عندما يتحد فريق من الأشخاص ذوي الخبرات المختلفة للغاية لحل مشكلة مشتركة، فيمكنهم حلها بطُرق لا يستطيع أي عضو في الفريق القيام بها بمفرده. ومع تقدم البشرية في القرن الحادي والعشرين، وهي تواجه مشاكل جديدة ومتفاعلة على نحو متبادل على كل المستويات، من الاجتماعي إلى التكنولوجي، يُعَد هذا درسًا مهمًّا للغاية.

الفصل التاسع

فعالية التحويلات الرياضية

ذهب مريض إلى عيادة طبيب لأول مرة.
فسأله الطبيب: «من استشرت قبل المجيء إليَّ؟»
«صيدلي القرية.»
«وما النصيحة الحمقاء التي قدَّمها لك ذلك الغبي؟»
«طلب مني أن آتي إليك كي تفحص حالتي.»

مؤلف غير معروف

إن الطريقة التي توصَّل بها المؤلف إلى هذه المعادلات ليست خالية من المشاكل، وتحليله من أجل تكاملها ينقصه الكثير على مقياس العمومية، وحتى الدقة.

«تقرير عن طلب جوزيف فورييه لنيل جائزة
معهد باريس للرياضيات لعام ١٨١١»

في الوقت الحاضر، غالبًا ما تتضمن زيارة المستشفى إجراء فحص إشعاعي. وهناك أنواع عديدة من الفحوص في هذا الشأن: التصوير بالرنين المغناطيسي، والتصوير المقطعي بالإصدار البوزيتروني، والتصوير بالموجات فوق الصوتية، وغير ذلك. بعضها يعرِض صورًا متحركة في الوقت الفعلي، والبعض الآخر يستخدم حيل الكمبيوتر (أي، الرياضيات) لتوفير صور ثلاثية الأبعاد. الميزة الأكثر أهمية لهذه الأعاجيب التكنولوجية هي أنها تعرض صورًا لما يحدث «داخل» جسمك. ومنذ وقت ليس ببعيد، كان سيُعَد ذلك من قبيل السحر. وهو لا يزال يبدو كذلك.

في العصور القديمة، وهو ما يعني في هذه الحالة أيَّ وقت قبل عام ١٨٩٥، كان على الأطباء استخدام حواسهم للتحقُّق مما كان يؤلم مرضاهم. فيمكنهم لمس الجسم للحصول على فكرة عن شكل بعض الأعضاء الداخلية وحجمها وموقعها، كما يمكنهم الاستماع إلى نبضات القلب والشعور بالنبض، ويمكنهم تقييم درجة الحرارة وشمُّ السوائل الجسدية ولمسها وتذوقها. لكن الطريقة الوحيدة التي تمكنهم من اكتشاف ما يبدو عليه بالفعل جسم الإنسان من الداخل هي شقُّ الجلد. في بعض الأحيان لم يكُن بإمكانهم فعل ذلك حتى، لأن السلطات الدينية غالبًا ما كانت تمنعه، على الرغم من أنه كان شائعًا جدًّا في ساحة المعركة، ولكن ليس لأي غرض طبي. غالبًا ما كانت توافق تلك السلطات نفسها على هذا النوع من التدخل، بشرط أن يُستخدم ضد الأشخاص ذوي المعتقدات المختلفة.

ثم بدأت حقبة جديدة في ٢٢ ديسمبر ١٨٩٥، عندما صوَّر بروفيسور الفيزياء الألماني فيلهلم رنتجن يدَ زوجته، وحصل على صورة تُظهر عظام أصابعها. كانت الصورة بالأبيض والأسود، مثل تقريبًا جميع الصور في ذلك الوقت، وكانت غير واضحة إلى حدٍّ ما، لكن القدرة على النظر داخل جسم كائن حيٍّ كان أمرًا غير مسبوق. لم تُعجب الزوجة بالأمر. فعند رؤيتها صورة جزء من هيكلها العظمي، قالت: «لقد رأيت موتي.»

كان اكتشاف رنتجن محضَ صدفة. في عام ١٧٨٥ أجرى خبير أكتواري يُدعَى ويليام مورجان بعض التجارب التي مرر خلالها تيارًا كهربائيًّا من خلال فراغ جزئي في أنبوب زجاجي. أنتج هذا وَهجًا خافتًا، يمكن رؤيته على نحو أفضل في الظلام، وقدَّم نتائجه إلى جمعية لندن الملكية. وبحلول عام ١٨٦٩، لاحظ الفيزيائيون الذين كانوا يُجرون تجارب في مجال أنابيب التفريغ، الذي أصبح مألوفًا حينها، نوعًا جديدًا غريبًا من الإشعاع، يُطلق عليه أشعَّة الكاثود لأنها كانت تنبعث من الكاثود (القطب السالب) الخاص بالأنبوب. في عام ١٨٩٣ نشر فرناندو سانفورد، بروفيسور الفيزياء، مقالًا عن «التصوير الكهربائي». لقد صنع أنبوبًا به صفيحةٌ رقيقة من الألومنيوم في أحد طرفيه، وثقب فيه ثَقبًا. وعندما كان يُمرر التيار، كان يمر ما كان يسبب الوهج الخافت عبر الثَّقب، ويصطدم بلوحٍ فوتوغرافي، ويعيد إنتاج شكل الثقب. وقد نُشرت أخبار عن اكتشافه في الصحافة؛ فكان العنوان الرئيسي لصحيفة «سان فرانسيسكو إجزامينر»: «دون عدسة أو ضوء، التُقطت صور بلوح وجسم في الظلام». كان الأمر رائعًا ومُحيِّرًا وغير مجدٍ على ما يبدو، لكنه أثار اهتمام الفيزيائيين واستمروا في محاولة فهم ما كان يحدث.



صورة أشعة إكس الخاصة بيد زوجة رنتجن.

أدرك رنتجن أن الوهج الغريب كان شكلًا من أشكال الإشعاع، الذي يشبه الضوء ولكنه غير مرئي. أطلق عليه اسم «أشعة إكس»؛ حيث، وفق المتعارف عليه آنذاك، كانت تشير كلمة «إكس» إلى أن طبيعتها غير معروفة. على ما يبدو — لا يمكننا أن نكون متأكدين لأن دفاتر ملاحظاته لم تصل إلينا — لقد اكتشف بالصدفة أن هذه الأشعة يمكن أن تمر عبر لوح من الورق المقوَّى. جعله هذا على الفور يتساءل عما يمكن أن تمر عبره أيضًا. ليس صفيحة رقيقة من الألومنيوم، على ما يبدو، حيث ظهر الثقب فقط في الصورة. كتب، أجل؛ أوراق علمية، أجل؛ يد زوجته، نعم. منحتنا أشعة إكس نافذة غير مسبوقة حول ما يدور داخل جسم الإنسان الحي. وأدرك رنتجن على الفور إمكاناتها الطبيَّة، وسارعت وسائل الإعلام في الترويج لها. وفي عام ١٨٩٦، نشرت دورية «ساينس» ٢٣ بحثًا عن أشعة إكس، التي أصبحت موضوعَ أكثر من ألف مقالة علمية في ذلك العام.

سُرعان ما اتَّضح أنه على الرغم من أن أشعة إكس لا تسبب ضررًا واضحًا، فإن التعرُّض المتكرر أو طويل الأمد لها قد يؤدي إلى حروقٍ بالجلد وتساقط الشعر. في إحدى

هذه الحالات، أُحضر طفل أصيب برصاصة في رأسه إلى مختبر في جامعة فاندربيلت، وأجرى جون دانيال تصويرًا بأشعة إكس له، وظل الطفل معرضًا لها لمدة ساعة كاملة. بعد ثلاثة أسابيع، لاحظ وجود بقعة صلعاء في رأس الطفل في المكان الذي وضع عليه أنبوب أشعة إكس. وعلى الرغم من هذه الأدلة، ظل العديد من الأطباء مقتنعين بأن أشعة إكس آمنة، وأرجعوا وقوع مثل هذا الضرر إلى التعرُّض للأشعة فوق البنفسجية أو غاز الأوزون، إلى أن توفيت اختصاصية التصوير بالأشعة الأمريكية إليزابيث فلايشمان بسبب المضاعفات الناجمة عن التعرض لأشعة إكس في عام ١٩٠٥. ومن ثَم استمرت الاستخدامات الطبية لتلك الأشعة، ولكن بحذر أكبر، وخفَّضت ألواح التصوير ذات الجودة الأعلى من وقت التعرض. ونحن ندرك اليوم أنه مهما كانت أشعة إكس مفيدة، فيجب أن تبقى جرعة التعرُّض الإشعاعي الإجمالية لها عند الحد الأدنى المطلَق. لكن استغرق إدراك ذلك مدة. ففي الخمسينيات من القرن الماضي، عندما كان عمري نحو عشر سنوات، أتذكر متاجر الأحذية التي كان لديها جهاز أشعة إكس، التي تتيح لك تجربة الأحذية ومعرفة مدى ملاءمتها لشكل قدميك.

شابَ صورَ أشعة إكس عددٌ من العيوب. كانت بالأسود والأبيض؛ أي مناطق سوداء لم تخترقها الأشعة، وأخرى بيضاء اخترقتها الأشعة، وظلال رمادية بينهما. أو، بشكل أكثر شيوعًا، كان يتم إنشاء العكس؛ إذ من الأسهل صنع صورة فوتوغرافية سالبة. حيث كانت تُظهر العظام بوضوح، وكانت الأنسجة الرخوة غير مرئية إلى حد كبير. لكن الصعوبة الأهم كانت أن الصورة ثنائية الأبعاد. في الواقع، لقد سطحت التخطيط الداخلي، وصنعت تراكُبًا لصور جميع الأعضاء بين مصدر أشعة إكس ولوح التصوير. بالطبع، كان بالإمكان محاولة التقاط المزيد من صور أشعة إكس من اتجاهات أخرى، لكن تفسير النتائج كان يتطلب مهارة وخبرة، والصور الإضافية كانت تزيد من جرعة الإشعاع.

ألم يكن من الأفضل لو أن هناك طريقةً ما لتصوير داخل الجسم باستخدام ثلاثة أبعاد؟

بالصدفة، كان قد قام علماء الرياضيات بالفعل ببعض الاكتشافات الأساسية حول هذا السؤال بالتحديد، موضحين أنه إذا التُقط الكثير من الصور «المسطحة» ثنائية الأبعاد من عدة اتجاهات مختلفة، فيمكنك استنتاج البِنية ثلاثية الأبعاد لمصدر تلك الصور. لكن لم يكن دافعهم هو أشعة إكس والطب. لقد كانوا فقط يتتبعون طريقةً كانت قد ابتكرت في الأساس لحل مشكلات ذات صلة بالموجات وتدفق الحرارة.

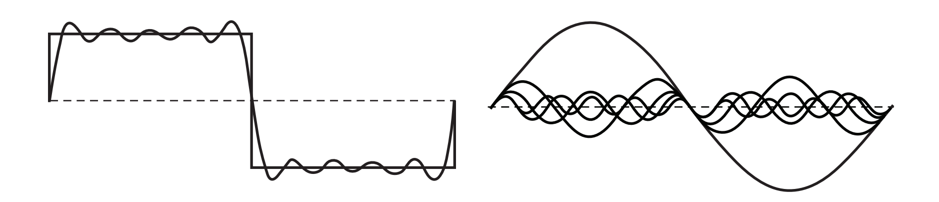
تتضمَّن القصة الكاملة مجموعة من العلماء البارزين، من بينهم جاليليو، الذي دحرج كُرات على منحدَر ولاحظ بابتهاج أنماطًا رياضية بسيطة في المسافة التي قطعتها خلال أي زمن محدد؛ ونيوتن، الذي وجد أنماطًا مهمة في حركات الكواكب. وقد استنتج نيوتن كلا النوعين من الأنماط من معادلات رياضية لحركة نظام أجسامٍ يتأثر بقُوًى. وفي كتابه المهم «المبادئ الرياضية للفلسفة الطبيعية»، اختار نيوتن شرح أفكاره باستخدام الهندسة الكلاسيكية، لكن صياغتها الرياضية «الأكثر وضوحًا» جاءت من خلال أحد اكتشافاته الأخرى، وهو حساب التفاضل والتكامل، الذي توصَّل إليه أيضًا بشكل منفصل جوتفريد فيلهلم لايبنتس. وبعد إعادة شرحها على هذا النحو، أدرك نيوتن أنه يمكن التعبير عن قوانين الطبيعة الأساسية من خلال المعادلات التفاضلية؛ وهي معادلات تدور حول المعدَّل الذي تتغير به الكميات المهمة عبر الزمن. ومن ثَم فإن السرعة المتجهة هي معدَّل تغير الموضع، والعجلة هي معدل تغير السرعة.

إن أنماط جاليليو تكون في أبسط صورها عند التعبير عنها فيما يتعلق بالعجلة؛ تتحرك الكرة المتدحرجة بعجلة ثابتة. ومن ثَم تزداد سرعتها المتجهة بمعدَّل ثابت، فهي تتزايد خطيًّا. ويتحدد موضعها من السرعة المتجهة المتزايدة على نحو ثابت، مما يعني ضمنيًّا أنها إذا بدأت من السكون عند الزمن صفر، فإن موضعها يتناسب مع «مربع» الزمن المنقضِي. وقد قرَن نيوتن هذه الفكرة بقانون بسيط آخر، وهو أن الجاذبية تتناسب عكسيًّا مع مربع المسافة، واستَنتج أن الكواكب تتحرك في مدارات إهليلجية، موضحًا الاستنتاجات التجريبية السابقة ليوهانس كيبلر.

تحمَّس علماء الرياضيات في أوروبا القارية لهذه الاكتشافات، وطبقوا المعادلات التفاضُلية على مجموعة واسعة من الظواهر الفيزيائية. تخضع موجات الماء والصوت لمعادلة الموجة، بينما للكهرباء والمغناطيسية معادلاتُهما الخاصة أيضًا، تمامًا مثل معادلة الجاذبية. والعديد من هذه المعادلات عبارة عن معادلات تفاضلية «جزئية»، تربط معدَّلات التغيُّر في الفراغ بمعدلات التغير خلال الزمن. وفي عام ١٨١٢، أعلَنت الأكاديمية الفرنسية للعلوم أن المسألة التي ستدور حولها جائزتها السنوية هي تدفق الحرارة. إن الأجسام الساخنة تفقد حرارتها وتبرد، وتتحرك الحرارة عبر المواد الموصلة لها، وهذا هو السبب في أن المِقْبض المعدِني للقِدر يمكن أن يسخن بشدة أثناء طهي محتوياته. وقد أرادت الأكاديمية وصفًا رياضيًّا لكيفية حدوث ذلك، وبدا أن معادلة تفاضُلية جزئية ستصبح وصفًا معقولًا؛ لأن توزيع الحرارة يتغير في كل من الزمن والفراغ.

لقد أرسل جوزيف فورييه إلى الأكاديمية ورقة بحثية حول تدفق الحرارة في عام ١٨٠٧، لكنهم رفضوا نشرها. ومن ثَم ألهم التحدي المتجدد فورييه لتطوير معادلته التفاضلية الجزئية لتدفق الحرارة، وفاز بالجائزة. تنُص «معادلته الحرارية»، في شكل رياضي، على أن الحرارة في موضع معين تتغير خلال الزمن عن طريق الانتشار إلى المناطق المجاورة من الفراغ، مثل قطرة من الحبر على ورق نشَّاف.

بدأت المتاعب عندما حاول فورييه حل معادلته، بادئًا بحالة بسيطة: الحرارة في قضيب معدِني. لقد لاحظ أن هناك حلًّا بسيطًا إذا كان التوزيع الأولي للحرارة يشبه منحنى الجيب أو جيب التمام في حساب المثلثات. ثم لاحظ أنه يمكنه التعامل مع توزيعات أولية أكثر تعقيدًا من خلال الجمع بين الكثير من منحنيات الجيب وجيب التمام. وقد وجد حتى صيغة خاصة بحساب التفاضل والتكامل، تصف بالضبط مقدار مساهمة كل حد: ضرب صيغة التوزيع الأولي للحرارة في الجيب أو جيب التمام ذي الصلة، ثم القيام بعملية تكامل للناتج. قاده هذا إلى تقديم زعمٍ جريء، وهو أن صيغته، التي تُسمى الآن متسلسلة فورييه، تحل مشكلة أي توزيع أوَّلي للحرارة أيًّا كان نوعه. على وجه التحديد، زَعَم أنها تصلح من أجل التوزيع المتقطع للحرارة، مثل الموجة المربعة: أي، درجة حرارة ثابتةٍ ما عبر نصف القضيب، ودرجة حرارة أخرى مختلفة عبر النصف الآخر.



كيفية الحصول على موجة مربعة من منحنيات الجيب وجيب التمام. الشكل الأيمن: الموجات الجيبية الفردية. الشكل الأيسر: مجموع أول خمسة حدود من متسلسلة فورييه ينشئ تقريبًا موجة مربعة. الحدود الإضافية (غير المعروضة) تُحسن التقريب.

هذا الزعم أوقعه في وسط نزاع كان قد استمر لعدة عقود. كانت قد ظهرت المشكلة نفسها، في الواقع الصيغة التكامُلية نفسها، بالفعل أثناء بحث أويلر وبرنولي عن معادلة الموجة. وهنا، المثال القياسي هو وَتَر كمان مثالي، وليس من الممكن بدء اهتزاز الوتر

بجعله متقطعًا؛ لأنه سينكسر. يشير الحدس الفيزيائي إلى أنه قد تكون هناك مشاكل في تمثيل الدوال المتقطعة، ويدعمه الحدس الرياضي بجعلنا نقلق بشأن «تقارب» المتسلسلة المثلَّثية. وهذا يعني، ما إذا كان جمع عدد لا نهائي من التذبذبات الجيبية منطقيًّا، وإذا كان كذلك، هل يناظر على نحو دقيق الموجة المربعة المتقطعة، أم شيئًا آخر.

دون الرغبة في الانتقاص من قدر فورييه، كان جزء من المشكلة هو أنه كان يفكر كفيزيائي، عندما كان منتقدوه يفكرون مثل علماء الرياضيات. فيزيائيًّا، إن الموجة المربعة منطقية كنموذج للحرارة. والقضيب المعدني يُصوَّر كخط مثالي، وهذه بالضبط الكيفية التي تَصوَّر بها أويلر وبرنولي وتر الكمان. إذا وُزعت الحرارة بشكل منتظم على طول نصف هذا الخط، وبدأ النصف الآخر وهو أكثر برودة، فإن النموذج الطبيعي يكون موجة مربعة.

لم يكن أيٌّ من النموذجين دقيقًا تمامًا باعتباره تمثيلًا للواقع، لكن ميكانيكا ذلك العصر كانت قائمة على الأجسام المثالية، مثل الكتل النقطية، والاصطدامات المرنة تمامًا، والقضبان التامةِ التماسُك والشديدة الرفع، وما إلى ذلك. كانت الموجة المربعة لا تنتمي لهذه المجموعة. علاوة على ذلك، من الناحية الرياضية، يتنبأ حل فورييه بأن الانقطاع ينتهي في الحال عن طريق الانتشار، ليصبح منحنًى حادًّا، ولكنه متصل يصبح مسطحًا ببطء، مما يجعله منطقيًّا على نحوٍ فيزيائي ويزيل الانقطاع الرياضي. لسوء الحظ، كانت هذه الحجج غامضة للغاية بحيث لم تُقنع علماء الرياضيات، الذين كانوا يعلمون أن المتسلسلات اللانهائية يمكن أن تصبح معقدة ومزعجة. وقد توصل مسئولو الأكاديمية إلى حل وسط؛ حيث منحوا فورييه الجائزة، لكنهم لم ينشروا بحثه.

لم يُثبِّط ذلك من عزيمته؛ حيث نشر فورييه عمله في عام ١٨٢٢ بعنوان «النظرية التحليلية للحرارة». بعد ذلك، وليغيظ الجميع حقًّا، تمكن من اعتلاء منصب سكرتير الأكاديمية، ونشر على الفور بحثه الأصلي الحائز للجائزة، دون تغيير، في دورية الأكاديمية. يا له من رد بارع!

لقد استغرق الأمر قرابة قرن لحل المشكلات الرياضية التي أثارتها مزاعم فورييه. بشكل عام، كان محقًّا في الكثير من الأمور، لكنه كان مخطئًا في العديد من الأشياء المهمة. لقد نجحت طريقته في الواقع مع الموجة المربعة، مع إضافة أو حذف بعض التعديلات الدقيقة حول ما حدث بالضبط عند الانقطاع. لكن صيغته بالتأكيد لم تنجح مع التوزيعات الأولية الأكثر تعقيدًا. ثم جاء الفَهم الكامل فقط بعد أن طور علماء

الرياضيات مفهومًا أكثر عمومية عن التكامل، جنبًا إلى جنب مع المفاهيم الطوبولوجية التي تُصاغ على أفضل نحوٍ فيما يتعلق بنظرية المجموعات.

قبل وقت طويل من فهم المجتمع الرياضي في النهاية لعمل فورييه، تحمَّس المهندسون للفكرة الأساسية وتبنَّوها. لقد أدركوا أن جوهر عمله كان تحويلًا رياضيًّا، يُسمَّى الآن «تحويل فورييه»؛ حيث يمكن إعادة تفسير أي إشارة معقَّدة تتغير بمرور الوقت على أنها مزيج من الإشارات البسيطة ذات الترددات المختلفة. وتخبرنا صيغة فورييه التكامُلية عن كيفية تغيير وجهة نظرنا من نطاق الزمن إلى نطاق التردد، والعودة مرة أخرى لنطاق الزمن، وهي العملية التي، على نحو ملحوظ، تستخدم الصيغة نفسها تقريبًا، مما يؤدي إلى إنشاء «ثنائية» بين التمثيلَين.

تعني هذه الثنائية أنه يمكنك عكس التحويل، واستعادة الإشارة الأصلية من التردُّدات التي تصنعها، مثل قلب عملة معدنية ثم إعادتها مرة أخرى. ميزة هذا الإجراء لعمل المهندسين هي أن بعض الميزات التي يصعب اكتشافها في نطاق الزمن تصبح واضحة في نطاق التردد. يمكن أن يعمل الأمر بالطريقة العكسية، أيضًا، لذلك لديك طريقتان مختلفتان تمامًا لتحليل البيانات نفسها، وكلٌّ منهما يُبرز، بشكل طبيعي، ميزاتٍ معينة تفتقدها الأخرى.

على سبيل المثال، تبدو استجابة مبنًى شاهق للزلازل عشوائية وفوضوية في نطاق الزمن. لكن في نطاق التردد، قد نرى عدة ارتفاعات كبيرة عند ترددات محددة. وتكشف هذه عن الترددات الرنَّانة التي يستجيب بها المبنى بشدة للزلزال. ولتصميم المبنى، بحيث لا يسقط في حالة وقوع زلزال، نحتاج إلى كبتِ تلك الترددات المحددة. والحل العملي المستخدم في بعض المباني هو تأسيس الصرح بأكمله على قاعدة خَرَسانية، موضوعة بعمق في الأساسات، التي يمكن أن تتحرك بشكل جانبي. ثم يمكننا «خمد» هذه الحركة الجانبية بربطها بأوزان أو زُنبُركات ضخمة.

وهناك تطبيق آخر يتعلق باكتشاف فرانسيس كريك وجيمس واتسون لبنية الحمض النووي. إن أحد الأدلة الرئيسية التي تؤكد أنهما كانا على حق هو صورة حيود أشعة إكس لبِلَّورة من الحمض النووي. تتمثل هذه التقنية في تمرير شعاع من أشعة إكس عبر البِلَّورة، مما يتسبب في ثني الأشعة وارتدادها، وهو سلوك يُسمَّى الحيود. تميل الموجات إلى التجمع بزوايا معينة، يحكمها قانون الحيود الخاص بلورانس وويليام براج، وما يظهر في الصورة هو ترتيب هندسي معقَّد من النقاط. نمط الحيود هذا هو في الأساس

نوع من تحويل فورييه لمواضع الذرات في جُزَيء الحمض النووي. وبتطبيق التحويل العكسي (وهي عملية حسابية معقَّدة تتم على الكمبيوتر، وقد أصبحت أسهل بكثير الآن مما كانت عليه في ذلك الوقت) يمكنك استنتاج شكل الجزيء. كما قلت، يجعل التحويل أحيانًا السمات التركيبية واضحة عندما يصعب تحديدها في الأصل. في هذه الحالة، اتَّضح، على الفور، لكريك وواتسون من خلال تجربتهم مع صور حيود أشعة إكس الأخرى، دون حساب التحويل العكسي، أن الجزيء كان أشبه بالحلزون. ولقد طوَّرت أفكار أخرى هذه الرؤية، مما أدى إلى التوصل إلى الشكل الحلزوني المزدوج الشهير، الذي جرى تأكيده لاحقًا باستخدام تحويل فورييه.

هذان مجرد مثالين على التطبيقات العملية لتحويل فورييه والنماذج الرياضية العديدة المشابهة. وتشمل التطبيقات الأخرى تحسين الاستقبال اللاسلكي، وإزالة التشويش الناتج عن الخدوش الموجودة في أقراص الفونوغراف القديمة، وتحسين أداء وحساسية أنظمة السونار التي تستخدمها الغواصات، والقضاء على الاهتزازات غير المرغوب فيها في السيارات في مرحلة التصميم.

كل ذلك، كما ستلاحظ، ليس له علاقة بتدفق الحرارة. إنها الفعالية اللامعقولة للرياضيات. ما يهم ليس التفسير المادي للمسألة — على الرغم من أن ذلك ربما يكون قد أثَّر على العمل الأصلي — ولكن بِنْيَتها الرياضية. تنطبق الأساليب نفسها على أي مسألة لها البنية نفسها، أو بنية مماثلة، ومن هنا تأتي صلة أجهزة الأشعة بالأمر.

لقد أصبح علماء الرياضيات أيضًا مفتونين بتحويل فورييه، وأعادوا صياغته بلُغة الدوال. الدالة هي قاعدة رياضية لتحويل عدد إلى عدد آخر، مثل «تربيع العدد» أو «تحديد جذره التكعيبي». وهذا يشمل جميع الدوال التقليدية مثل كثيرات الحدود، والجذور، والدوال الأُسِّية، واللوغاريتمات، والدوال المثلثية: الجيب، وجيب التمام، والظل، وما إلى ذلك، ولكن يمكن أيضًا أن تُنشأ «قواعد» أكثر تعقيدًا لا يُعبَّر عنها كصيغ، مثل الموجة المربعة التي تسببت في عناء كبير لفورييه.

من وجهة النظر هذه، يأخذ تحويل فورييه دالة من نوع ما (الإشارة الأصلية) ويحولها إلى دالة أخرى من نوع مختلف (قائمة الترددات). هناك أيضًا تحويل عكسي، وهو يُلغي تأثير التحويل الأول. إن مفهوم الثنائية، الذي يرى أن التحويل العكسي يكاد يكون مماثلًا للتحويل نفسه، هو ميزة إضافية. فالسياق الصحيح هو فراغات دوال ذات خصائص محددة: فراغات الدوال. وفراغات هيلبرت المستخدمة في نظرية الكم (ارجع

للفصل السادس) هي فراغات دوال؛ حيث تكون قيم الدالة أعدادًا مركبة، وترتبط مبادئها الرياضية ارتباطًا وثيقًا بتلك الخاصة بتحويل فورييه.

يميل جميع علماء الرياضيات المهتمين بالجانب البحثي للاستجابة بشكل معيَّن على نحوٍ تلقائي عند مصادفة فكرة جديدة. فعند توصل شخص ما إلى فكرة جديدة ذات سمات رائعة ومفيدة، يبدءون فورًا في التساؤل عما إذا كانت هناك أفكار أخرى مشابهة تستغل الحيلة نفسها في ظروف مختلفة. هل هناك تحويلات أخرى مثل تحويل فورييه؟ هل هناك ثنائيات أخرى؟ وقد تابع علماء الرياضيات البحتة مثل هذه الأسئلة بطريقتهم المجردة والعامة، في حين أن نظراءهم المهتمين بالجانب التطبيقي (وكذلك المهندسون والفيزيائيون والكثيرون غيرهم) بدءوا في التساؤل عن كيفية استخدام كل هذه الأشياء. في هذه الحالة، أدت حيلة فورييه الذكية إلى إطلاق مجال كامل من التحويلات والثنائيات، لم تسبر أغواره بالكامل حتى اليوم.

مهَّد أحد هذه التطبيقات المتنوعة التي استفادت من فكرة فورييه الطريقَ لظهور أجهزة الأشعة الطبية الحديثة. كان مخترعه هو يوهان رادون. لقد وُلِد رادون عام ١٨٨٧ في مدينة تيتشن، ببوهيميا، وهي منطقة تقع بين النمسا والمجر، وقد أصبحت المدينة تُسمى الآن ديتشين وتتبع جمهورية التشيك. وكان، بكل المقاييس، ودودًا، وحسَنَ المظهر، وهادئًا، ومحبًّا للعلم. ومع ذلك، لم يكن خجولًا بشكل خاص، ولم تكن لديه مشكلة في التواصل الاجتماعي. ومثل العديد من الأكاديميين والمهنيين، كان يحب الموسيقى، وقبل الراديو والتليفزيون غالبًا ما كان الناس يجتمعون في منازلهم للترفيه بعضهم عن بعض. وكان رادون يعزف على الكمان بشكل جيد للغاية، وكان مُغنيًا بارعًا. وكعالم رياضيات، عمل في البداية على حساب تفاضل وتكامل المتغيرات، وهو موضوع رسالة الدكتوراه الخاصة به، الذي أدى بشكل طبيعي إلى مجال التحليل الدالي الجديد والسريع النُّمو. هذا المجال، الذي بدأه علماء الرياضيات البولنديون بقيادة ستيفان باناخ، أعاد تفسير الأفكار الرئيسية للتحليل الكلاسيكي من حيثُ فراغات الدوال اللانهائية الأبعاد.

في بدايات مجال التحليل، ركز علماء الرياضيات على حساب أشياء، مثل مشتقة الدالة، ومعدل تغيُّرها، وتكاملها، وهو المنطقة الواقعة أسفل الرسم البياني الخاص بها. ومع تقدم المجال، أصبح الاهتمام مركَّزًا على الخصائص العامة لعمليات التفاضل والتكامل، وكيف تتعامل مع مجموعات الدوال. إذا جمعنا دالَّتين معًا، ماذا سيحدث

لتكامُلَيهما؟ وبرزت بعض السمات الخاصة للدوال: هل هي متصلة (دون قفزات)؟ هل هي قابلة للتفاضُل (تتغير بسلاسة)؟ قابلة للتكامل (هل حساب المساحة ممكن)؟ كيف ترتبط هذه الخصائص؟ كيف تعمل جميعها إذا أخذنا نهاية متتالية من الدوال، أو مجموع متسلسلة غير منتهية؟ ما نوع النهاية أو المجموع؟

لقد صاغ باناخ وزملاؤه هذه الأمور الأكثر عمومية باستخدام «الداليات». فكما تحوِّل الدالة عددًا إلى آخر، فإن الدالية تحول دالة إلى عدد أو دالة أخرى. الأمثلة هي «التكامل» أو «التفاضل». إحدى الحيل العظيمة التي اكتشفها علماء الرياضيات البولنديون وآخرون هي أننا يمكننا أخذ مبرهَنات حول دوال الأعداد وتحويلها إلى مبرهَنات حول داليات الدوال. قد تكون المبرهَنة الناتجة صحيحة، أو لا؛ تأتي المتعة من تحديد ذلك. اكتسبت الفكرة قبولًا؛ لأن المبرهَنات البسيطة نسبيًّا عن الدوال تحولت على ما يبدو إلى أخرى أعمق بكثير حول الداليات، ولكن غالبًا ما تنطبق البراهين البسيطة نفسها. كانت الحيلة الأخرى هي تجاهل جميع المشكلات التقنية ذات الصلة بكيفية تكامل الصيغ المعقَّدة في الجيوب واللوغاريتمات وما إلى ذلك، وإعادة التفكير في الأساسيات. ما هدف التحليل في الأساس؟ تبيَّن أن السمة الأساسية للتحليل هي تحديد مدى قرب عددين بعضهما من بعض. ويُقاس ذلك من خلال تحديد الفرق بينهما، بأي ترتيب يجعل هذا الفرق موجَبًا. تصبح الدالة متصلة إذا أدت التغيُّرات الصغيرة في العدد المُدخل إلى تغيرات صغيرة في العدد الناتج. ولإيجاد مشتقَّة دالة، نزيد المتغير بمقدار صغير ونلاحظ كيف تتغير الدالة بما يتناسب مع هذا المقدار الصغير. وللقيام بعمليات مماثلة في المستوى التالي، الداليات، نحتاج إلى تحديد ما يعنيه قرب «دالَّتين» بعضهما من بعض. هناك طرق عديدة للقيام بذلك. يمكننا ملاحظة الفرق بين قِيَمهما عند أي نقطة معينة، وجعله صغيرًا (لجميع النقاط). ويمكنك جعل تكامل هذا الفرق صغيرًا. يؤدي كل اختيار إلى «فراغ دوال» مختلف، يحتوي على جميع الدوال بخصائص محددة، ومزوَّدة بـ «الدالة المترية» أو «الدالة المعيارية» الخاصة بها. عند المقارنة بين الأعداد والدوال، يلعب فراغ الدوال دور مجموعة الأعداد الحقيقية أو المركبة، والدالية هي قاعدة لتحويل دالة في فراغ دوال ما إلى دالة في فراغ دوال آخر. يعد تحويل فورييه مثالًا مهمًّا بشكل خاص للدالية، التي تحول دالة إلى متتالية من معاملات فورييه. يسير التحويل العكسي في الاتجاه الآخر؛ إذ تتحول متتاليات الأعداد إلى دوال.

من خلال وجهة النظر هذه، دُمجَت أجزاء كبيرة من التحليل الكلاسيكي معًا فجأة لتكون أمثلة على التحليل الدالي. يمكن اعتبار دوال واحد أو أكثر من المتغيرات الحقيقية

أو المركبة داليات بسيطة إلى حدٍّ ما في فراغات بسيطة إلى حدٍّ ما؛ مجموعة الأعداد الحقيقية، أو مجموعة الأعداد المركبة، أو الفراغات المتجهية المنتهية الأبعاد التي تشكلت بواسطة متتاليات من هذه الأعداد. إن دالة من ثلاثة متغيرات هي مجرد دالة (دالية) محددة في فراغ كل ثُلاثيات الأعداد الحقيقية. يجري تعريف المزيد من الداليات الخاصة، مثل «التكامل»، في (لنقل) فراغ جميع الدوال المتصلة من الفراغ ثُلاثي الأبعاد إلى الأعداد الحقيقية، مع دالة المسافة «تكامل مربع فرق قِيَم الدالتين ذات الصلة». كان الاختلاف الرئيسي يكمن في الفراغات؛ فالأعداد الحقيقية والفراغ ثلاثي الأبعاد منتهِيَا الأبعاد، لكن فراغ جميع الدوال المتصلة لا منتهي الأبعاد. يشبه التحليل الدالي التحليل العادي تمامًا، ولكنه يتم في فراغ لا منتهي الأبعاد.

تَلاءَم ابتكار مهم آخر ظهر في هذه الفترة بسهولة مع هذه المنظومة، وهو نظرية تكامل جديدة وأكثر عمومية وأكثر قابلية للتعامل معها، وقد قدمها أونري ليبيج، تحت اسم «نظرية القياس». والقياس هو كمية مثل المساحة أو الحجم، تعين عددًا لمجموعة من النقاط في فراغ ما. والتطور الجديد هو أن هذه المجموعة يمكن أن تصبح معقَّدة للغاية، على الرغم من أن بعض المجموعات معقدة للغاية لدرجة أنه حتى مفهوم ليبيج للقياس لا يُمكن أن ينطبق عليها.

إن حساب التفاضل والتكامل للمتغيرات، موضوع الدكتوراه الخاص برادون، يشير على نحو واضح إلى ضرورة استخدام «الداليات» بمجرد أن نلاحظ أنه يهدف لإيجاد دوال (وليس أعدادًا) ذات خصائص مثالية. لذلك كان من الطبيعي أن يوسِّع رادون نطاق دراسته من المجال الكلاسيكي الخاص بحساب التفاضل والتكامل للمتغيرات إلى التحليل الدالي. وقد أثمر ذلك عن نتائج رائعة، وسُميت العديد من الأفكار والمبرهنات المهمة في نظرية القياس والتحليل الدالي باسمه.

من أمثلة ذلك، تحويل رادون، الذي توصل إليه في عام ١٩١٧. من وجهة نظر التحليل الدالي، هو قريب الشبه جدًّا رياضيًّا من تحويل فورييه. يمكننا البدء بصورة في المستوى، يُنظَر إليها على أنها صورة بالأبيض والأسود مع مناطق ذات ظلال رَمادية مختلفة. يمكن تمثيل الظل بعدد حقيقي من ٠ (أسود) إلى ١ (أبيض). يمكنك تسطيح الصورة في أي اتجاه وجمع الأعداد التي تمثل المناطق الفاتحة والداكنة معًا، للحصول على إسقاط للصورة. يتضمن تحويل رادون كل هذه الإسقاطات المسطَّحة في كل الاتجاهات. الفكرة المهمة حقًّا هي التحويل العكسي، الذي يتيح لنا إعادة بناء الصورة الأصلية من هذه الإسقاطات.

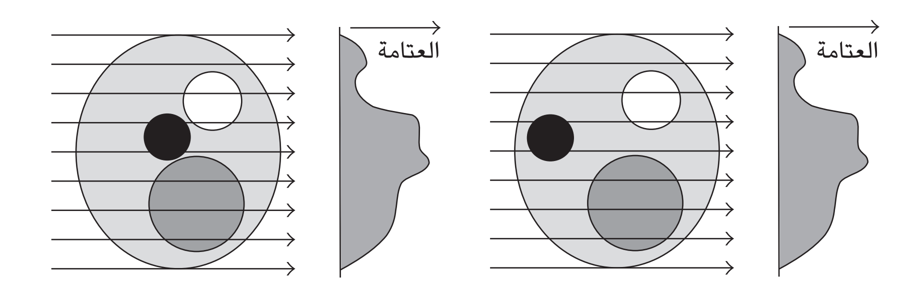
بحسب اعتقادي، لقد درس رادون تحويله لأسباب رياضية بحتة. ولم تذكر ورقته البحثية عن التحويل أي تطبيقات؛ أقرب شيء في هذا الإطار هو ذكر موجز لعلاقاته بالفيزياء الرياضية، وتحديدًا نظرية الجهد، التي هي الأرضية المشتركة للكهرباء والمغناطيسية والجاذبية. يبدو أنه ركز أكثر على مجال الرياضيات والتعميمات الممكنة. في أبحاثه اللاحقة استكشف نظيرًا ثلاثي الأبعاد، حيث يُسطِّح توزيع الضوء والظلام في الفراغ في جميع المستويات الممكنة، ووجد صيغة إعادة بناء لهذه العملية أيضًا. في وقت لاحق، وجد آخرون تعميمات لأبعادٍ أعلى. ربما يكون مصدر إلهام رادون هو أشعة إكس، التي تؤدي بالضبط هذا النوع من الإسقاط على توزيع الأعضاء والعظام في جسم الإنسان، وتفسر «الضوء» و«الظلام» على أنهما فروق في العتامة بالنسبة لأشعة إكس. لكن الأمر استغرق قرنًا قبل أن يجد اكتشافه تطبيقًا في الأجهزة التي تكاد تقترب قُدرتها على تصوير الجزء الداخلي من جسم الإنسان من الإعجاز.

تستخدم أجهزة الأشعة المقطعية — التي تُسمى حاليًّا أجهزة الأشعة المقطعية المُحَوسَبة — أشعةَ إكس لإنشاء صور ثلاثية الأبعاد للجزء الداخلي من جسم الإنسان. وتُخزَّن تلك الصور على جهاز كمبيوتر، ويمكن التحكم فيها لإظهار العظام والعضلات، أو لتحديد مواضع الأورام السرطانية. وتُستخدم أنواع أخرى من أجهزة الأشعة، مثل أجهزة الموجات فوق الصوتية، على نطاق واسع أيضًا. كيف يكتشف جهاز الأشعة ما بداخل الجسم دون شقِّه؟ نعلم جميعًا أن أشعة إكس تمر بسهولة عبر الأنسجة الرخوة، في حين أن الأنسجة الأكثر كثافة، مثل العظام، تكون أكثر عتامة بالنسبة إليها. لكن صورة أشعة إكس تُظهر فقط متوسط كثافة الأنسجة عند عرضها من اتجاه ثابت. السؤال الآن: كيف يمكن تحويل هذا إلى صورة ثلاثية الأبعاد؟ يفتتح رادون ورقته البحثية بإخبارنا أنه قد حل هذه المشكلة:

> عندما يوجِد المرء تكامل دالة ذات متغيرين x وy — «دالة نقطية» $f(P)$ في المستوى — وفقًا لشروط انتظام مناسبة على طول خط مستقيم عشوائي g، يحصل المرء في القيم التكاملية $F(g)$، على «دالة خطية». في الجزء الأول من هذه الورقة البحثية، المشكلة التي حُلَّت هي عكس هذا التحويل الدالي الخطي، أي، الإجابة على السؤالين التاليين: هل يمكن اعتبار كل دالة خطية تفي بشروط انتظام مناسبة أنها مبنية على هذا النحو؟ إذا كان الأمر كذلك، فهل يمكن تمييز f عن F على نحو متفرد، وكيف يمكن حساب f؟

كانت إجابته، تحويل رادون العكسي، هي صيغة تُعيد بناء الترتيب الداخلي للأنسجة — بتعبير أدق، درجة عتامتها بالنسبة لأشعة إكس — من مجموعة الإسقاطات الكاملة في جميع الاتجاهات.

لفهم كيفية يعمل هذا، نصف أولًا ما يمكن أن يلاحظه فحص بالأشعة (إسقاط) مفرد للجسم. يُجرى هذا الفحص في شريحة واحدة ثنائية الأبعاد عبر الجسم. وتُظهر الصورة منظرًا تخطيطيًّا لحزمة أشعة إكس المتوازية التي تمر عبر شريحةٍ واحدة من الجسم تحتوي على العديد من الأعضاء الداخلية التي لها درجات عتامة مختلفة بالنسبة لأشعة إكس. وبينما تمر الحزمة عبر هذه الأعضاء، تختلف شدة الأشعة التي تخرج من الجانب الآخر. كلما كان العضو أكثر عتامة، على طول تلك الحزمة المعينة، انخفضت شدتها. يمكننا إنشاء رسم بياني يوضح كيفية اختلاف الشدة المرصودة حسب موضع الحزمة.

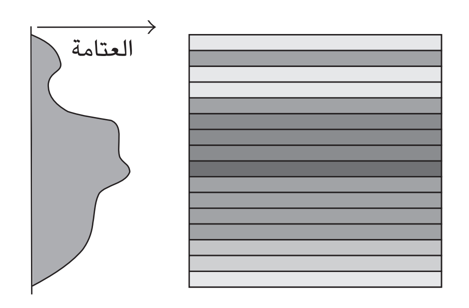


كلما كانت المنطقة أكثر دكانة، كانت أكثر عتامة. الشكل الأيمن: يقدم فحصُ شريحة واحدة من الجسم بأشعة إكس من اتجاه واحد رسمًا بيانيًّا للعتامة المرصودة لتلك الأشعة في هذا الاتجاه فقط. الشكل الأيسر: تؤدي الترتيبات الداخلية المختلفة إلى الرسم البياني نفسها.

في الواقع، إن صورة واحدة من هذا النوع تسطح توزيع التدرج الرمادي داخل الجسم، على طول اتجاه الأشعة. من الناحية التقنية، هذا إسقاط للتوزيع في هذا الاتجاه. من الواضح إلى حد ما أن إسقاطًا واحدًا من هذا النوع لا يمكن أن يخبرنا بالضبط عن كيفية ترتيب الأعضاء. على سبيل المثال، إذا حركنا العضو الأسود في اتجاه الحزمة، فإن الإسقاط لا يتغير. ومع ذلك، إذا أجرينا فحصًا آخر بالأشعة يصور الجسم من اتجاه رأسي، فإن الموضع المتغير للقرص الأسود يكون له تأثير مرئي على ذلك الرسم البياني

الخاص بالعتامة. بديهيًّا، يمكننا الحصول على مزيد من المعلومات حول المواضع المكانية للأعضاء والأنسجة من خلال إجراء سلسلة كاملة من الفحوص بالأشعة، كلٌّ منها يدور قليلًا مقارنةً بالسابق عليه، إلى أن نرى الجسم من عدد كبير من الاتجاهات. لكن هل هذه معلومات كافية لتحديد المواضع بالضبط؟

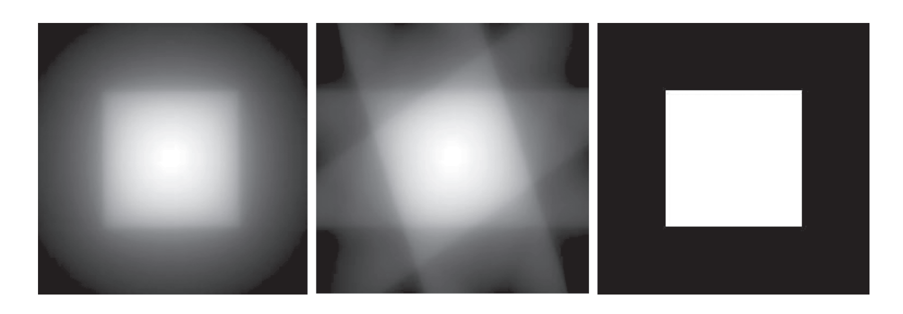
أثبت رادون أننا إذا كنا نعرف الرسوم البيانية الخاصة بالعتامة عند استعراض شريحة الجسم من جميع الاتجاهات الممكنة، فسيمكننا استنتاج توزيع التدرُّج الرمادي الثنائي الأبعاد للأنسجة والأعضاء بدقة. في الواقع، هناك طريقة بسيطة جدًّا لتحقيق ذلك، تُسمى الإسقاط الخلفي. يؤدي هذا إلى نشر توزيع التدرج الرمادي، على طول اتجاه الإسقاط، ولكنه يفعل ذلك على نحوٍ منتظم. لذلك نحصل على منطقة مربعة مليئة بقطاعات رمادية. كلما ارتفع الرسم البياني، كان القطاع المقابل أكثر دكانة. بديهيًّا، نحن ننشر اللون الرمادي، على نحو منتظم، على طول القطاع؛ لأننا لا نستطيع تحديد مكان أي عضو داخلي محدد من خلال الإسقاط.



تحويل الرسم البياني للعتامة إلى سلسلة من قطاعات التدرج الرمادي، تتوافق مع اتجاه حزمة أشعة إكس.

يمكننا القيام بذلك لكل اتجاه للسلسلة الأصلية للفحوص بالأشعة. تخبرنا صيغة رادون العكسية أنه عندما يجري تدوير كل هذه الصور القطاعية إلى الزاوية المقابلة ثم تراكبها، بحيث نجمع قيم التدرج الرمادي الخاصة بها عند كل نقطة، فإن النتيجة — التي تكون بمقياس مناسب — تعيد بناء التوزيع الأصلي للأعضاء الداخلية. توضح الصورة التالية كيف يعمل هذا عندما يكون الشكل الأصلي عبارة عن مربع، ونحن نعيد

بناءه عن طريق الإسقاط الخلفي من ٥ و١٠٠ اتجاه مختلف. كلما زاد عدد الزوايا التي نستخدمها، كانت النتيجة أفضل.



الشكل الأيمن: مربع. الشكل الأوسط: إسقاط خلفي من ٥ اتجاهات. الشكل الأيسر: إسقاط خلفي من ١٠٠ اتجاه.

بمجرد أن نعيد بناء توزيع الأنسجة في شريحة واحدة، نزيح الجسم لمسافة قصيرة ونفعل الشيء نفسه مرة أخرى. ونكرر هذا حتى نقسم الجسم من الناحية النظرية مثل شرائح رغيف. ثم يمكننا إعادة تجميع الشرائح عن طريق «تكديسها» بواسطة الكمبيوتر، والحصول على وصف كامل للتوزيع الثلاثي الأبعاد للأنسجة. تُعرف هذه الطريقة التي تحدد البنية الثلاثية الأبعاد من سلسلة من الشرائح الثنائية الأبعاد، بالتصوير المقطعي، وقد استخدمها اختصاصيو الميكروسكوبات منذ مدة طويلة للنظر داخل الأجسام الصلبة، مثل الحشرات أو النباتات. وتتمثل التقنية الأساسية المستخدمة هنا في غمس الكائن في الشمع، ثم قطع شرائح رفيعة جدًّا منه باستخدام أداة تشبه قطاعة لحم مقدَّد مصغرة، وهي تُسمَّى المِشراح (التي مقابلها الإنجليزي microtome مأخوذ من الكلمة اليونانية mikros (أي، صغير)، وtemnein (أي، يقطع).) تستخدم أجهزة الأشعة المقطعية الفكرة نفسها، باستثناء أنها تقوم بعملية التقطيع بأشعة إكس وبعض الحيل الرياضية.

بعد ذلك، تُستخدم تقنية رياضية تقليدية لإجراء معالجة لاحقة للبيانات الثلاثية الأبعاد وتوفير جميع أنواع المعلومات ذات الصلة. يمكننا أن نرى كيف ستبدو الأنسجة عبر شريحة مختلفة تمامًا، أو نعرض أنسجة من نوع معين فقط، أو ننشئ ترميزًا لَونيًّا

للعضلات والأعضاء والعظام. أو أي شيء آخر نريده. إن الأدوات الرئيسية هنا هي أساليب قياسية لمعالجة الصور، وهي تعتمد في النهاية على هندسة الإحداثيات الثلاثية الأبعاد.

من الناحية العملية، الأمر ليس بمثل هذه البساطة. فجهاز الأشعة لا يلتقط عددًا غير نهائي من صور الأشعة من سلسلة متصلة من الاتجاهات، بل من عدد منتهٍ كبير من الاتجاهات المنفصلة المتقاربة. ومن ثَم يجب تعديل الجوانب الرياضية لأخذ ذلك في الاعتبار. من المفيد هنا فلترة البيانات لتجنب أخطاء التصوير التي تنتج عن استخدام مجموعة منفصلة من زوايا العرض. لكن النقطة الأساسية هي بالضبط ما توصل إليه رادون، قبل أكثر من خمسين عامًا من اختراع أول جهاز أشعَّة. لقد اخترع المهندس الكهربائي الإنجليزي جودفري هوانزفيلد أول جهاز أشعة عام ١٩٧١. وكان قد وُضع الجانب النظري له في عام ١٩٥٦–١٩٥٧ على يد الفيزيائي الأمريكي المولود في جنوب أفريقيا ألان كورماك، الذي نشره في عام ١٩٦٣–١٩٦٤ . في ذلك الوقت لم يكن على علم بنتائج رادون، لذلك توصَّل بنفسه إلى ما كان يحتاجه، لكنه علم لاحقًا بورقة رادون البحثية، التي كانت أكثر عمومية. وقد أدى تطوير هوانزفيلد وكورماك للتصوير المقطعي المُحَوسَب لحصولهما على جائزة نوبل لعام ١٩٧٩ في علم وظائف الأعضاء أو الطب. وقد كانت تكلفة هذا الجهاز ٣٠٠ دولار. بينما يصل سعر جهاز الأشعة المقطعية التجاري اليوم إلى أكثر من ١٫٥ مليون دولار.

لا تُستخدم أجهزة الأشعة في الطب فقط. إذ يستخدمها علماء المصريات اليوم على نحوٍ روتيني لمعرفة ما بداخل المومياوات دون فك لفائف الكتان الخاصة بها. فيمكنهم فحص هيكلها العظمي وأي أعضاء داخلية متبقية، والبحث عن علامات الكسور والأمراض المختلفة، ومعرفة مكان إخفاء التمائم الدينية. وكثيرًا ما تحتوي المتاحف على مومياوات افتراضية مزودة بشاشة تعمل باللمس يمكن للزوار التحكم فيها؛ إذ يستطيعون إزالة طبقات من لفائف الكتان، ثم الجلد، ثم العضلات، حتى تبقى العظام فقط. كل هذا يعتمد على الرياضيات المدمَجة في الكمبيوتر: الهندسة ثلاثية الأبعاد، ومعالجة الصور، وطرق العرض الرُّسومي.

هناك العديد من أنواع أجهزة الأشعة الأخرى: أجهزة الموجات فوق الصوتية، التي تستخدم موجات الصوت؛ وأجهزة التصوير المقطعي بالإصدار البوزيتروني التي تكشف عن الجسيمات دون الذرية المنبعثة من المواد المشعَّة المحقونة في الجسم؛ وأجهزة التصوير بالرنين المغناطيسي التي تكتشف التأثيرات المغناطيسية في أنوية الذرات، والتي كان يطلق

على تقنية التصوير المستخدمة فيها الرنين المغناطيسي النووي، إلى أن شعر القائمون على الترويج لها بالقلق من أن الناس قد ينزعجون من كلمة «نووي»، فيربطون التقنية بالقنابل ومحطات توليد الطاقة. إن كل نوع من أنواع أجهزة الأشعة له قصة رياضية خاصَّة به.

الفصل العاشر

ابتسم، من فضلك!

إن وظيفة الكاميرا الوحيدة هي عدم إعاقة عملية التقاط الصور.

كين روكويل، «كاميرتك لا تهم»

يُحمِّل البشر حوالي تريليون صورة على الإنترنت كل عام، مما يوحي بتقييم مفرط في التفاؤل حول مدى حرص الآخرين على مشاهدة صورنا الذاتية أثناء العطلات، أو أطفالنا حديثي الولادة، أو غيرها من الأشياء، التي بعضها تافه. إن الأمر سريع، وسهل، وهاتف كل منا يتضمن كاميرا. هناك قدر هائل من الرياضيات متضمَّن في تصميم وتصنيع الكاميرات. إن هذه العدسات الصغيرة العالية الدقة هي أعاجيب تكنولوجية تتضمن بعض جوانب الفيزياء الرياضية المعقدة للغاية المتعلقة بانكسار الضوء بواسطة الأجسام الصلبة المنحنية. في هذا الفصل، أود التركيز على جانب واحد فقط من جوانب التصوير الفوتوغرافي المعاصر، ألا وهو: ضغط الصور. تُخزن الكاميرات الرقمية، سواء كانت قائمة بذاتها أو مدمَجة في الهاتف، صورًا مفصَّلة للغاية على هيئة ملفات ثنائية. ويبدو أن بطاقات الذاكرة قادرة على تخزين معلومات أكثر مما يمكنها الاحتفاظ به بالفعل. فكيف يمكن تضمين الكثير من الصور التفصيلية في ملف كمبيوتر صغير؟

تحتوي الصور الفوتوغرافية على الكثير من المعلومات المكررة، التي يمكن إزالتها دون فقدان الوضوح. وتجعل التقنيات الرياضية من الممكن القيام بذلك بطرق منهجية ومصمَّمة بعناية. إن معيار JPEG في الكاميرات الرقمية الصغيرة التي تعمل بتقنية التوجيه والنقر، الذي كان حتى وقت قريب إلى حد ما تنسيق الملفات الأكثر شيوعًا، والذي لا يزال مستخدمًا حتى الآن على نطاق واسع؛ يستخدم «خمسة» تحويلات رياضية منفصلة، تُنفَّذ على التوالي. وهي تتضمن تحليل فورييه المتقطع والجبر ونظرية الترميز.

وقد دُمِج جميع هذه التحويلات في برنامج تشغيل الكاميرا، الذي يضغط البيانات قبل نسخها إلى بطاقة الذاكرة.

هذا ما لم تكن، بالطبع، تفضل البيانات الأولية أو الخام، التي هي، على نحو أساسي، ما التقطته الكاميرا بالفعل. إذ تتزايد سعة بطاقات الذاكرة بسرعة كبيرة، بحيث لم يعد من الضروري ضغط الملف. لكنك في النهاية ستجد نفسك أمام ملفات صور بحجم ٣٢ ميجابايت كان حجمها يصل إلى عُشر هذا الرقم عند ضغطها، وستجد أنها ستستغرق وقتًا أطول للتحميل إلى إحدى خدمات التخزين السحابي. إن تحديد ما إذا كان هذا يستحق العناء يعتمد على طبيعة شخصيتك وما تريد الصور من أجله. إذا كنت محترفًا، فمن المحتمل أن يكون ذلك ضروريًّا. أما إذا كنت سائحًا يستخدم كاميرا ذات تقنية التوجيه والنقر مثلي، فيمكنك الحصول على صورة جيدة على نحو مذهل لنمرٍ، مثلًا، في ملف بتنسيق JPEG بحجم ٢ ميجابايت.

يُعد ضغط الصور جزءًا رئيسيًّا من العملية الأكثر عمومية لضغط البيانات، وهو لا يزال ذا أهمية شديدة على الرغم من التطورات الهائلة في التكنولوجيا. وفي كل مرة تزداد فيها سرعة الجيل التالي من الإنترنت بمقدار عشر مرات وتصبح ذات سعة أكبر بكثير، يبتكر أحد العباقرة تنسيقًا جديدًا للبيانات (فيديو ثلاثي الأبعاد فائق الوضوح، على سبيل المثال) يحتاج إلى بيانات أكثر بكثير من ذي قبل، وهذا يعيدنا ثانية إلى المربع الأول.

في بعض الأحيان لا يكون لدينا خيار سوى ضغط كل بايت من السعة خارج قناة الإشارة. في ٤ يناير ٢٠٠٤، على سطح المريخ، سقط شيء من السماء، وارتطم بالأرض، ثم ارتد. في الواقع «مركبة استكشاف المريخ الأولى»، والمعروفة باسم «سبيريت»، ارتدت ٢٧ مرة، وهي محاطة ببالونات قابلة للنفخ مثل نوع كوني من اللفائف الفقاعية، خلال هبوط رائع للغاية. بعد القيام بفحص عام وتنفيذ إجراءات تهيئة مختلفة، شرعت المركبة في استكشاف سطح هذا الكوكب الغريب، وسرعان ما انضمت إليها رفيقتها المركبة «أوبُرتيونتي». وقد حققت هاتان المركبتان نجاحًا هائلًا وأرسلتا كميات هائلة من البيانات. في ذلك الوقت، أشار عالم الرياضيات فيليب ديفيس إلى أن تلك المهمة الفضائية استندت إلى قدر هائل من الجوانب الرياضية، لكن «العامة لا يدركون ذلك». وقد اتضح أن الأمر لم يقتصر على العامة فحسب. ففي عام ٢٠٠٧، زار أوفه يانكفيست وبيورن تولدبود، وهما عالما رياضيات في مرحلة الدراسات العليا من الدنمارك، مختبر الدفع النفاث في باسادينا في مهمة صحفية هدفها الكشف عن الجوانب الرياضية الخفية في برنامج استكشاف المريخ. وكان الرد:

«نحن لا نقوم بأي من ذلك. نحن لا نستخدم في الواقع أي جبر مجرد، أو نظرية المجموعات، أو هذا النوع من الأشياء.»

كان هذا أمرًا مقلقًا، لذلك سأل أحد العالمين الدنماركيين:

«ما عدا في تشفير القناة؟»

«أهذا يستخدم الجبر المجرد؟»

«تستند شفرات ريد–سولومون إلى حقول جالوا.»

«هذه معلومة جديدة بالنسبة لي.»

في الواقع، تستخدم بعثات ناسا الفضائية بعض المبادئ الرياضية المتقدمة جدًّا لضغط البيانات وتشفيرها بطريقة تصحح الأخطاء الحتمية في الإرسال. عليك أن تفعل ذلك عندما يكون جهاز الإرسال على بُعد نحو مليار كيلومتر من الأرض ولديه قدرة مصباح كهربائي. (يساعد ترحيل البيانات عبر مركبة مدارية حول المريخ مثل «مارس أوديسي» أو «مارس جلوبال سيرفيور» قليلًا.) لا يحتاج معظم المهندسين إلى معرفة ذلك، لذا فهم لا يعرفونه. إن هذا تمثيل مصغَّر لحالة عدم التقدير الأوسع نطاقًا للمجتمع تجاه الرياضيات.

يُخزن كل شيء على جهاز الكمبيوتر الخاص بك، سواء كان رسالة بريد إلكتروني أو صورة أو مقطع فيديو أو ألبوم المغنية تايلور سويفت، في الذاكرة كتدفق من الأرقام الثنائية، «البتات»، ٠ و١. وكل ثمانية بتات تشكل بايتًا واحدًا، وكل ١٠٤٨٥٧٦ بايتًا يشكل ميجابايتًا واحدًا. وتشغل الصورة النموذجية المنخفضة الدقة حوالي ٢ ميجابايت من مساحة التخزين. وعلى الرغم من أن جميع البيانات الرقمية تتخذ هذا الشكل، فإن التطبيقات المختلفة تستخدم تنسيقات مختلفة، ومن ثَم فإن معنى البيانات يعتمد على التطبيق. ولكل نوع من البيانات بِنية رياضية خفية، وغالبًا ما تكون سهولة المعالجة أكثر أهمية من حجم الملف. ويمكن أن يؤدي تنسيق البيانات على نحو ملائم إلى التكرار؛ أي استخدام بتات أكثر مما يتطلَّبه محتوى المعلومات الفعلي. يوفر هذا فرصة لضغط البيانات عن طريق إزالة التكرار.

إن اللغة الإنجليزية المكتوبة (والمنطوقة) ذات طابع تكراري للغاية. وكدليل على ذلك، إليك عبارة حُذف فيها كل حرف خامس:

surr_unde_by_nfla_ableball_ons_ike_ome_ort_f co_mic

يمكنك على الأرجح معرفة ما تعنيه العبارة، بقليل من التفكير أو الجهد. فالمعلومات المتبقية كافية لإعادة بناء العبارة الأصلية بأكملها.

ومع ذلك، ستجد هذا الكتاب أسهل بكثير إذا لم أُقنع ناشري بتوفير الحبر عبر حذف كل حرف خامس. إن الكلمات الكاملة أسهل على الدماغ في معالجتها؛ لأنَّ هذا ما تعلَّم القيام به. ومع ذلك، عندما تريد إرسال سلسلة من البتات إلى شخص آخر، بدلًا من معالجة تلك البيانات باستخدام تطبيق ما، فإن التسلسل الأقصر من أرقام ٠ و١ يكون أكثر كفاءة. في بدايات نظرية المعلومات، أدرك الرواد مثل كلود شانون أن التكرار يجعل من الممكن تشفير إشارة باستخدام بتات أقل. في الواقع، لقد أثبت صيغةً تحدد مقدارَ أقصر شفرة يمكن أن يصنع إشارة، لمقدار معين من التكرار.

إن التكرار ضروري؛ لأن الرسائل التي ليس بها تكرار لا يمكن ضغطها دون فقدان المعلومات. والإثبات هو حُجة عَد بسيطة. لنفترض، على سبيل المثال، أننا مهتمون بالرسائل التي يبلغ طولها عشرة بتات، مثل ١٠٠١١١٠١٠١. هناك بالضبط ١٠٢٤ سلسلة بت من هذا القبيل. لنفترض أننا نريد ضغط عشرة بتات من البيانات في سلسلة ٨ بتات واحدة. يوجد على وجه التحديد ٢٥٦ سلسلة من هذا القبيل. لذلك عدد الرسائل يبلغ أربعة أضعاف عدد السلاسل المضغوطة. ولا توجد طريقة لتعيين سلسلة ٨ بتات لكل سلسلة ١٠ بتات؛ بحيث تحصل سلاسل ١٠ بتات مختلفة على سلاسل ٨ بتات مختلفة. إذا كان من الممكن أن تظهر كل سلسلة ١٠ بتات باحتمالية متساوية، فسيتضح أنه لا توجد طريقة ذكية للتغلب على هذا القيد. ومع ذلك، إذا كانت بعض سلاسل ١٠ بتات شائعة للغاية، والبعض الآخر ليس شائعًا للغاية، فيمكننا اختيار شفرة تعين سلاسل بتات قصيرة (على سبيل المثال، ٦ بتات) للرسائل الأكثر شيوعًا، وسلاسل بتات أطول (ربما ١٢ بتًا) للرسائل غير الشائعة. هناك عدد ضخم من سلاسل ١٢ بتًا، لذلك لن تنفد منا. في كل مرة تظهر فيها واحدة، فإنها تضيف اثنين من البتات إلى الطول، ولكن في كل مرة تظهر فيها رسالة شائعة، تحذف أربعة بتات. ومع الاحتماليات المناسبة، يُحذف عدد أكبر من البتات من ذلك الذي يُضاف.

لقد نشأ فرع كامل من الرياضيات، نظرية التشفير، حول مثل هذه التقنيات. وهي بشكل عام أكثر دقة من تلك التي أوجزتُها للتو، وعادة ما تستفيد من سمات الجبر المجرد لتحديد الشفرات. لا ينبغي أن يكون هذا مفاجئًا للغاية؛ لقد رأينا في الفصل الخامس أن الشفرات، في جوهرها، دوال رياضية، وأن الدوال الخاصة بنظرية الأعداد مفيدة بشكل

خاص. والهدف هناك هو السرية، بينما هنا هو ضغط البيانات، ولكن تنطبق نفس وجهة النظر العامة. إن الجبر يتمحور حول «البنية» وهكذا التكرار.

يستغل ضغط البيانات، ومن ثَم ضغط الصور أيضًا، التكرار لإنشاء شفرات تقصر البيانات من نوع معين. في بعض الأحيان تتم عملية الضغط «دون فقدان للبيانات»؛ إذ يمكن إعادة بناء المعلومات الأصلية بالضبط من النسخة المضغوطة. وفي بعض الأحيان تُفقَد بيانات، وتكون عملية إعادة البناء مجرد تقريب للبيانات الأصلية. قد يكون ذلك سيئًا، على سبيل المثال، فيما يتعلق بأرصدة البنوك، ولكنه غالبًا ما يكون جيدًا بالنسبة للصور؛ الحيلة هي إعداد الأشياء بحيث يظل التقريب يبدو أمام العين البشرية مثل الصورة الأصلية. في هذا السيناريو، لم تكن المعلومات التي فُقدت بشكل غير قابل للاسترداد مهمة كثيرًا في المقام الأول.

معظم صور العالم الحقيقي تحتوي على تكرار. غالبًا ما تحتوي صور العطلات على كُتل كبيرة من السماء الزرقاء، التي غالبًا ما تكون لها، إلى حد كبير، الدرجة نفسها من اللون الأزرق، لذلك يمكن أن يُستبدل بالكثير من البكسلات التي تحتوي جميعها على العدد نفسه: زوجين من الإحداثيات للأركان المقابلة لمستطيل، وشفرة قصيرة تعني «لوِّن «هذه» المنطقة بـ «تلك» الدرجة من اللون الأزرق». هذه الطريقة لا تفقد فيها أي بيانات. إنها ليست ما يُستخدَم بالفعل، ولكنها توضح سبب إمكانية الضغط دون فقدان للبيانات.

أنا غير مواكب لأحدث الصيحات؛ وهذا يعني أنني أستخدم كاميرا ذات تقنية غير حديثة، تعود لعشر سنوات تقريبًا. هذا أمر مخزٍ! أنا على دراية بالتقنية الحديثة بما يكفي لاستخدام هاتفي ككاميرا، في بعض الأحيان، لكن هذا ليس ما أقوم دائمًا، وفي رحلات العطلات الكبرى مثل رحلات السفاري لمشاهدة النمور في المتنَزَّهات الوطنية بالهند، أصطحب معي كاميرا رقمية صغيرة تعتمد على تقنية التوجيه والنقر. وهي تقوم بإنشاء ملفات صور بأسماء مثل IMG_0209.JPG. يُظهر معرِّف JPG أن تنسيق الملف هو JPEG، وهي الأحرف الأولى من Joint Photographic Experts Group (أي، مجموعة خبراء التصوير الفوتوغرافي المشتركة)، ويشير إلى نظامٍ لضغط البيانات. إن JPEG هو معيار صناعي، على الرغم من أنه تطور على مر السنين وهو يأتي الآن في عدة أشكال مختلفة تقنيًّا.

يستخدم تنسيق JPEG[1] على الأقل خمس خطوات مختلفة بالتتابع، ومعظمها يضغط البيانات من الخطوة السابقة (أي، البيانات الأولية الأصلية للخطوة الأولى). وتعيد الخطوات الأخرى تشفيرها لمزيد من الضغط. وتتكوَّن الصور الرقمية من ملايين المربعات الصغيرة، التي تُسمى البكسلات أو عناصر الصورة. تعين بيانات الكاميرا الأولية سلاسل بت لكل بكسل لتمثيل اللون والسطوع. وتُمثل كلتا الكميتين في وقت واحد كنِسَب من ثلاثة مكونات: الأحمر والأخضر والأزرق. النسب المنخفضة لجميع الثلاثة تتوافق مع الألوان الفاتحة، والنسب العالية مع الداكنة. وتُحوَّل هذه الأعداد إلى ثلاثة أعداد مرتبطة تتوافق بشكل أفضل مع كيفية إدراك الدماغ البشري للصور. الأول، النُّصوع، يحدد السطوع الكلي، ويُقاس بأعداد تتراوح من الأسود، مرورًا بظلال رمادية فاتحة بشكل متزايد، وحتى الأبيض. إذا حذفنا معلومات الألوان، فستكون لدينا صورة عتيقة الطراز بالأبيض والأسود؛ في الواقع، العديد من درجات اللون الرمادي. العددان الآخران، المعروفان باسم التشبُّع اللوني، هما الفروق بين النصوع ومقداري الضوء الأزرق والأحمر على التوالي.

وللتعبير عن الأمر باستخدام الرموز، إذا كان R يعني أحمر، وG يعني أخضر، وB يعني أزرق، سيُستبدل بالأعداد الأولية لـ R وG وB النصوع $R + G + B$، والتشبعان اللونيان $R + G = (R + G + B) - B$ و$G + B = (R + G + B) - R$. إذا كنا نعرف $R + G + B$ و$R + G$ و$G + B$، فيمكننا حساب R وG وB، لذلك هذه الخطوة ستتم دون فقدان للبيانات.

أما الخطوة الثانية فهي ليست دون فقدان للبيانات. حيث تقلل بيانات التشبع اللوني إلى قِيَم أصغر عن طريق تقليل دقة الوضوح. هذه الخطوة وحدها تقلل حجم ملف البيانات إلى النصف. وهذا مقبول لأن النظام البصري البشري، مقارنةً بما «تراه» الكاميرا، أكثر حساسية للسطوع وأقل حساسية لاختلافات الألوان.

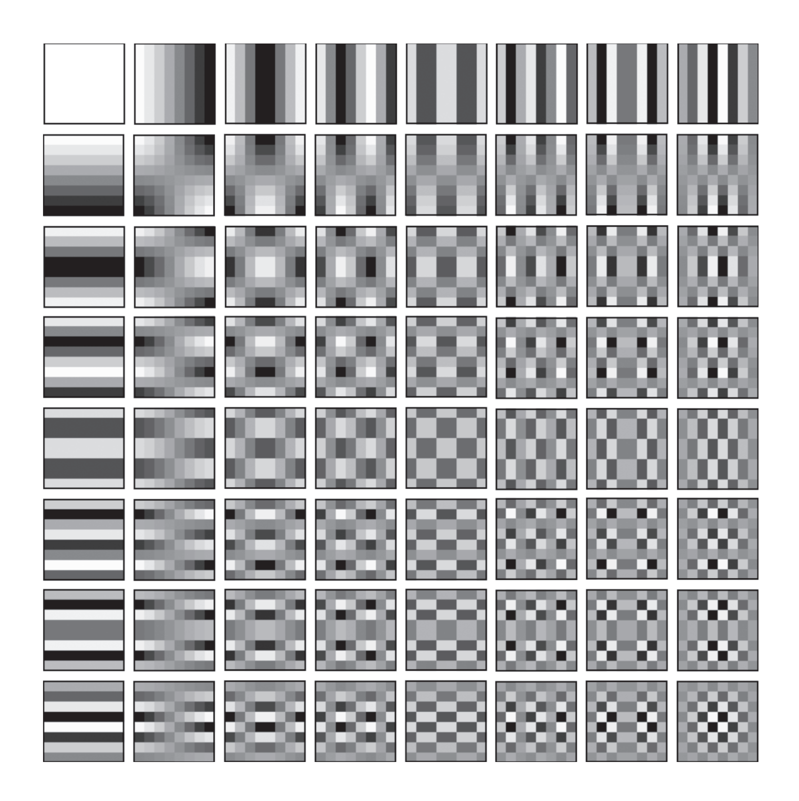
والخطوة الثالثة أكثر الخطوات اعتمادًا على الرياضيات. إذ تضغط معلومات النصوع، باستخدام نسخة رقمية من تحويل فورييه، وقد تعرفنا عليه في الفصل التاسع فيما له صلة بأجهزة الأشعة الطبية. هناك عُدِّل تحويل فورييه الأصلي، الذي يحول الإشارات إلى الترددات المكونة لها أو العكس، ليُمثل إسقاطات الصور ذات التدرج الرمادي. أما هنا فنحن نمثل الصور ذات التدرج الرمادي نفسها، ولكن بتنسيق رقمي بسيط. إذ تُقسم الصورة إلى كتل صغيرة ٨ × ٨ بكسلات، لذلك هناك ٦٤ قيمة مختلفة ممكنة للنصوع، واحدة لكل بكسل. يمثل تحويل جيب التمام المتقطع، الذي يُعد نسخة رقمية من تحويل

فورييه، هذه الصورة ذات التدرج الرمادي ٨ × ٨ كتراكب لمضاعفات ٦٤ صورة قياسية (وذلك كما هو موضح في الشكل التالي). هذه المضاعفات هي سعات الصور المقابلة. وتبدو هذه الصور مثل قطاعات وألواح شطرنج ذات عروض مختلفة. ويمكن الحصول على أي كتلة ٨ × ٨ بكسلات بهذه الطريقة، لذا مرة أخرى هذه الخطوة تتم دون فقدان للبيانات. في الإحداثيات على الكتلة، هذه الكتل القياسية عبارة عن نسخ متقطعة من $\cos mx \cos ny$ للأعداد الصحيحة المختلفة m وn، حيث يمتد x أفقيًّا وy عموديًّا وكلاهما يتراوح بين ٠ و٧.

على الرغم من أن تحويل فورييه المتقطع لا ينتج عنه فقدان للبيانات، فإنه ليس بلا فائدة؛ لأنه يجعل الخطوة الرابعة ممكنة. تعتمد هذه الخطوة مرة أخرى على نقص الحساسية في الرؤية البشرية، مما يؤدي إلى وجود تكرار. إذا تباين السطوع أو اللون عبر مناطق كبيرة من الصورة، فإننا نلاحظ ذلك. وإذا تباين في مناطق صغيرة، فإن نظام الرؤية يقلل من تأثيرها ولا نرى سوى المتوسط. هذا هو السبب في أن الصور المطبوعة يمكن فهمها، على الرغم من أنها عند الفحص الدقيق تمثل ظلالًا رمادية من خلال أنماط النقاط السوداء على الخلفية البيضاء للورقة. تعني هذه السمة الخاصة بالرؤية البشرية أن الأنماط ذات القطاعات الدقيقة جدًّا أقل أهمية، لذلك يمكن تسجيل سعاتها بدقة أقل.

الخطوة الخامسة تُعَد حيلة تقنية، تُسمى «شفرة هوفمان»، لتسجيل سعات الأنماط الأساسية البالغ عددها ٦٤ على نحو أكثر كفاءة. ابتكر ديفيد هوفمان هذه الطريقة في عام ١٩٥١ عندما كان لا يزال طالبًا. حيث طُلب منه كتابة ورقة بحثية عن الشفرات الثنائية الفعالة على النحو الأمثل، لكنه لم يتمكن من إثبات أن أي شفرة موجودة هي المثلى. وبينما هو على وشك الاستسلام، فكر في طريقة جديدة ثم أثبت أنها أفضل ما يمكن. بشكل عام، تكمن المشكلة في تشفير مجموعة من الرموز باستخدام سلاسل ثنائية، ثم استخدامها كقاموس لتحويل رسالة إلى شكل مشفَّر. يجب القيام بذلك بحيث يُقلَّل الطول الإجمالي للرسالة المشفرة إلى الحد الأدنى.

على سبيل المثال، قد تكون الرموز هي أحرف الأبجدية الإنجليزية. يوجد ٢٦ منها، لذا يمكننا فقط أن نعين لكل منها سلسلة مكونة من ٥ بتات، على سبيل المثال، A يساوي ٠٠٠٠١، وB يساوي ٠٠٠١٠، وهكذا. ونحن بحاجة إلى خمسة بتات؛ لأن أربعة بتات تعطي فقط ١٦ سلسلة. لكن هذا لن يكون فعالًا؛ لأن الحروف التي تظهر بشكل غير متكرر، مثل Z، تستخدم نفس عدد البتات كتلك الشائعة مثل E. سيكون من الأفضل تعيين سلسلة قصيرة، مثل ٠ أو ١، من أجل E، وسلاسل أطول تدريجيًّا عندما تصبح



الأنماط الأساسية البالغ عددها ٦٤ لتحويل جيب التمام المتقطع.

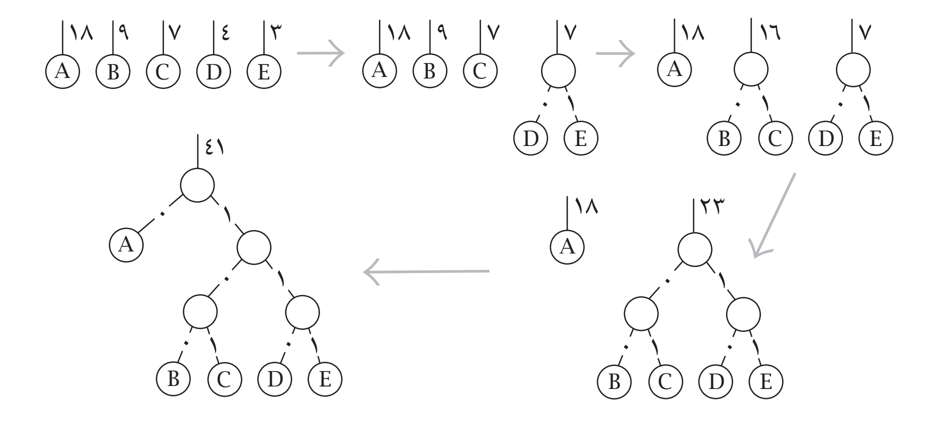
الأحرف أقل شيوعًا. ولكن نظرًا لأن سلاسل الشفرة لها أطوال مختلفة، فنحن بحاجة إلى معلومات إضافية لإخبار المستلم بمكان تقسيم السلاسل إلى أحرف منفصلة. يمكن القيام بذلك عن طريق التعرف على بادئةٍ في مقدمة سلسلة الشفرة، ولكن يجب أن تكون الشفرة خاليةً من البادئة؛ لا تظهر سلسلة شفرة كبداية لسلاسل الشفرة الأطول. إذا حدث ذلك، فلن نعرف أين تنتهي سلسلة الشفرة هذه. يحتاج الحرف غير الشائع مثل Z الآن إلى عدد أكبر من البتات، ولكن نظرًا لأنه غير شائع، فإن السلاسل الأقصر التي تمثل E ستكفي للتعويض. وسيصبح الطول الإجمالي للرسالة النموذجية أقصر.

تحقق شفرات هوفمان هذا الهدف من خلال إنشاء «مخطط شجري»، وهو نوع من الرسم البياني لا يحتوي على حلقات مغلقة، وهو شائع جدًّا في مجال علوم الكمبيوتر؛

لأنه يمثل استراتيجية كاملة لقرارات الموافقة/الرفض، وكلٌّ منها يعتمد على القرار السابق عليه. إن أوراق المخطط الشجري هي الرموز A، وB، وC، إلخ، وينبثق فرعان من كل ورقة، يمثلان البِتَين ٠ و١. كل ورقة تُسمى بعدد، يمثل وزنها، وهو يوضح عدد مرات ظهور الرمز المقابل. يُنشأ المخطط الشجري خطوةً بخطوة عن طريق دمج الورقتين الأقل شيوعًا في ورقة «رئيسية» جديدة، بينما تصبح كل ورقة منهما «فرعية». الوزن المخصص للورقة الرئيسية هو مجموع وزني الورقتين الفرعيتين. تستمر هذه العملية حتى تُدمج جميع الرموز بهذه الطريقة. ثم تُقرأ سلسلة الشفرة الخاصة بالرمز من المسار الذي يؤدي إلى هذا الرمز.

على سبيل المثال، يُظهر الشكل التالي في أعلى اليسار خمسة رموز هي A وB وC وD وE، والأعداد ١٨ و٩ و٧ و٤ و٣، التي تشير إلى مدى شيوعها. الرمزان الأقل شيوعًا هما D وE. أما المرحلة الثانية، أعلى المنتصف، فتُدمَج هذه لتشكيل ورقة رئيسية (غير مرقمة) بوزن ٧ من حاصل جمع ٣ و٤، ويصبح كلٌّ من الرمزين D وE ورقة فرعية. يُسمى الفرعان اللذان يؤديان إليهما ٠ و١. وتتكرر هذه العملية حتى يُدمَج جميع الرموز (أسفل اليسار). والآن نقرأ سلاسل الشفرة باتباع المسارات أسفل الشجرة. يُتوصَّل إلى A من خلال فرع واحد يُسمى ٠. ويُتوصَّل إلى B من خلال المسار ١٠٠، وC من خلال المسار ١٠١، وD من خلال المسار ١١٠، وE من خلال المسار ١١١. لاحظ كيف يحصل A، وهو الرمز الأكثر شيوعًا، على مسار قصير، بينما تحصل الرموز الأقل شيوعًا على مسارات أطول. إذا استخدمنا بدلًا من ذلك شفرة ذات طول ثابت، سوف نحتاج إلى ثلاثة بتات على الأقل لتمثيل خمسة رموز؛ لأن هناك أربعة سلاسل ٢ بت فقط. هنا تكون السلاسل الأطول سلاسل ٣ بتات، ولكن الأكثر شيوعًا تكون سلاسل ١ بت، لذلك في المتوسط، هذه الشفرة أكثر كفاءة. يضمن هذا الإجراء أن الشفرة خالية من البادئة؛ لأن أي مسار يؤدي إلى رمز يتوقف عند هذا الرمز. ولا يمكن أن يستمر إلى رمز آخر. علاوة على ذلك، عند البدء بالرموز الأقل شيوعًا، يجري تعيين أقصر المسارات للرموز الأكثر شيوعًا. إنها فكرة ذكية جدًّا، وسهلة البرمجة، وبسيطة جدًّا من الناحية المفاهيمية بمجرد أن تفهمها.

عندما تُنشِئ الكاميرا ملفًّا بتنسيق JPEG، فإن الوحدات الإلكترونية المدمَجة بها تقوم بكل هذه العمليات الحسابية بأسرع ما يمكن بمجرد التقاط صورة. وعملية الضغط لا تتم دون فقدان للبيانات، لكن معظمنا لن يلاحظ أبدًا؛ على أي حال، لا تعيد شاشات الكمبيوتر أو المطبوعات الورقية إنتاج الألوان ودرجات السطوع بدقة تامة، إلا إذا جرت معايَرَتها

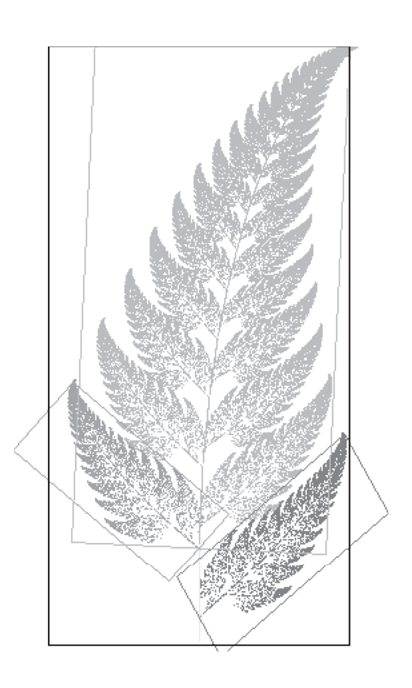


إنشاء شفرة هوفمان.

بعناية. تجعل المقارنة المباشرة بين الصورة الأصلية والنسخة المضغوطة الاختلافات أكثر وضوحًا، ولكن حتى في هذه الحالة، يتطلب الأمر عين خبير لتحديد الفرق عند تقليل حجم الملف إلى ١٠٪ من الحجم الأصلي. أما البشر العاديون فسيلاحظون الفرق فقط عندما تنخفض نسبة التقليل إلى حوالي ٣٪. لذلك يمكن أن يخزن نظام JPEG عشرة أضعاف عدد الصور على بطاقة ذاكرة معينة مقارنة بتخزين البيانات الأولية الأصلية. هذا الإجراء المعقَّد المكون من خمس خطوات، الذي يتم تنفيذه في طرفة عين في الخلفية، هو السر الذي يقف وراء هذه العملية، وهو يستخدم على الأقل خمسة مجالات مختلفة من الرياضيات.

ظهرت طريقة أخرى لضغط الصور في أواخر ثمانينيات القرن العشرين من هندسة الفراكتالات. وكما تتذكرون، فإن الفراكتال هو شكل هندسي ببِنية مفصلة على جميع المقاييس، مثل الخطوط الساحلية والسحب. ويرتبط بأي فراكتال عدد، يُسمى البُعد الفراكتالي الخاص به، وهو مقياس لمدى تعقيد الفراكتال. عادةً ما يكون هذا البُعد ليس عددًا صحيحًا. تشتمل فئة مفيدة من الفراكتالات المرنة رياضيًّا على تلك المتشابهة ذاتيًّا؛ إذ تبدو الأجزاء الصغيرة منها، المكبَّرة بشكل مناسب، تمامًا مثل الأجزاء الأكبر للشكل ككل. والمثال الكلاسيكي هو نبات السرخس، الذي يتكون من عشرات السَّعفات الأصغر حجمًا، التي كل منها يشبه نبات سرخس مصغر. يمكن تمثيل الفراكتالات المتشابهة ذاتيًّا من

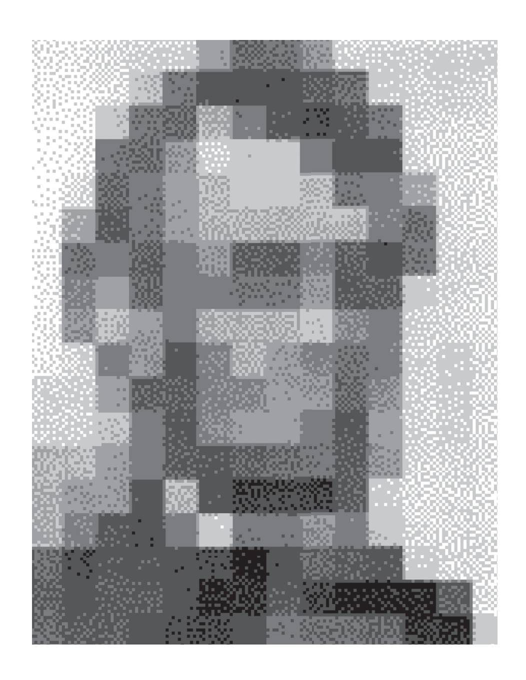
خلال نظام رياضي يُسمى نظام الدوال المتكررة. وهو مجموعة من القواعد تخبرنا بكيفية إنشاء نسخ مصغرة من الشكل وتحريكها بحيث تتلاءم معًا لتعطي الشكل الكامل. ويمكننا إعادة بناء الفراكتال من هذه القواعد، وهناك أيضًا صيغة للبُعد الفراكتالي.



صورة سرخس فراكتالية، مصنوعة من ثلاث نسخ ذاتية محولة.

في عام ١٩٨٧، أدرك مايكل بارنزلي، وهو عالم رياضيات مفتون بالفراكتالات، أن هذه الخاصية قد تشكل أساس طريقة لضغط الصور. فبدلًا من استخدام كميات هائلة من البيانات لتشفير كل التفاصيل الدقيقة للسرخس، تشفر فقط نظام الدوال المتكررة المقابل، الذي يتطلب بيانات أقل بكثير. ويمكن استخدام برنامج كمبيوتر لإعادة بناء صورة السرخس من نظام الدوال المتكررة. وبالتعاون مع آلان سلون، أسس شركة تُسمى إتيريتيد سِيسْتِمز المحدودة، التي حصلت على أكثر من ٢٠ براءة اختراع. وفي عام ١٩٩٢، حققت الشركة إنجازًا كبيرًا؛ إذ توصلت إلى طريقة آلية للتوصل إلى قواعد مناسبة لأنظمة الدوال المتكررة، التي تبحث عن مناطق صغيرة من الصورة يمكن اعتبارها نسخًا

مصغرة من مناطق أكبر قليلًا. لذلك تستخدم الكثير من الأجزاء لتغطية الصورة. ومع ذلك، فهي أيضًا عامة تمامًا، وقابلة للتطبيق على أي صورة، وليس فقط الصور التي من الواضح أنها متشابهة ذاتيًّا. لم يصل ضغط الصور الفراكتالي إلى مستوى نجاح الضغط باستخدام نظام JPEG لأسباب مختلفة، ولكنه استُخدم في العديد من التطبيقات العملية. ربما كان الأكثر نجاحًا هو الموسوعة الرقمية الخاصة بشركة مايكروسوفت، «إنكارتا»، حيث ضُغطت جميع الصور الرئيسية باستخدام طريقة نظام الدوال المتكررة.



لمن هذه الصورة؟ ضيِّق عينيك ثم حدق.

وخلال التسعينيات من القرن الماضي، بذلت الشركة محاولات حثيثة لتوسيع نطاق الطريقة ليشمل ضغط ملفات الفيديو، ولكن لم ينجح أيٌّ منها، ويرجع ذلك بشكل أساسي إلى أن أجهزة الكمبيوتر لم تكن سريعة بما يكفي ولم تكن مزوَّدة بذاكرة كافية في ذلك الحين. حيث كان يستغرق ضغط دقيقة واحدة من الفيديو ١٥ ساعة. لكن كل ذلك

تغير الآن، وتحققت نسب ضغط فراكتالي للفيديوهات تبلغ ١:٢٠٠ في خلال حوالي دقيقة واحدة لكل كادر فيديو. ومع ذلك، فإن تطور إمكانيات المعالجة يجعل أيضًا الطرق الأخرى ممكنة، وقد جرى التخلي عن الضغط الفراكتالي للفيديوهات في الوقت الحالي. لكن الفكرة الأساسية كانت مفيدة لبعض الوقت، ولا تزال إمكانية مثيرة للاهتمام.

لدى البشر حيلة غريبة جدًّا للتعرف على صورة غير واضحة المعالم؛ فنحن نضيق أعيننا ونحدِّق. إنه لأمر مدهش، كم يساعدنا ذلك في معرفة ماهية الصورة، خاصة إذا كانت ضبابية بعض الشيء، أو إذا كانت صورة كمبيوتر بها بكسلات خشِنة للغاية. هناك صورة شهيرة مكونة من ٢٧٠ مربعًا باللون الأسود والأبيض والرمادي، وقد أنشأها ليون هارمون في مختبرات بيل في عام ١٩٧٣ من أجل مقال حول الإدراك البشري والتعرف على أنماط الكمبيوتر. لقد كانت الصورة تسأل: لمن هذه الصورة؟ في النهاية إذا حدقت في الصورة، فسيبدو على نحو غامض أنه أبراهام لِنكولن، ولكن إذا ضيقت عينيك وحدقت فيها، فإنه سيبدو حقًّا مثل لِنكولن.

كلنا نفعل هذا، لذلك نحن نعلم أن الأمر ينجح، لكنه يبدو غير معقول. كيف يمكننا تحسين جودة صورة سيئة بجعل رؤيتنا لها أسوأ؟ جزء من الإجابة نفسي: من خلال تضييق العينين، نحن نضع نظام المعالجة المرئية لدماغنا في «وضع الصورة السيئة»، الذي يُفترض أنه يطلق خوارزميات خاصة لمعالجة الصور تطورت للتعامل مع البيانات غير الواضحة. لكن جزءًا آخر هو: أن تضييق العينين، للمفارقة، يعمل كنوع من المعالجة المسبَقة، التي تحسن الصورة بطرق مفيدة معينة. على سبيل المثال، إنه يطمس حدود صورة لِنكولن ذات البكسلات الخشنة بحيث لم تعد تبدو ككومة من كتل البناء الرمادية.

منذ حوالي أربعين عامًا، بدأ علماء الرياضيات في دراسة مكافئ دقيق ومتعدد الاستخدامات لتضييق البشر لأعينهم، وهو يُسمى التحليل المُوَيْجي. تنطبق هذه التقنية على البيانات العددية بالإضافة إلى الصور المرئية، وقد قُدمت في الأصل من أجل استخراج بِنية على مقياس مكاني معين. تتيح لنا المويجات اكتشاف الغابة، بينما نظل غير مدركين أنها تتكون من الكثير من الأشجار والشُّجيرات المتشابكة.

كان الدافع الأصلي نظريًّا إلى حد كبير؛ كانت المويجات أداة رائعة لاختبار النظريات العلمية لأشياء مثل التدفق المضطرب للموائع. في الآونة الأخيرة، اكتسبت المويجات بعض التطبيقات الواقعية للغاية. ففي الولايات المتحدة، يستخدم مكتب التحقيقات الفيدرالي

المويجات لتخزين بيانات بصمات الأصابع بتكلفة أقل، وقد حذت وكالات إنفاذ القانون في بلدان أخرى حذوَه. ولا تسمح لنا المَويجات بتحليل الصور فحسب، بل تتيح لنا ضغطها.

في نظام JPEG، تُضغط الصور عن طريق تجاهل المعلومات الأقل أهمية للرؤية البشرية. ومع ذلك، نادرًا ما تُمثل المعلومات بطريقة توضح البِتات الأقل أهمية. لنفترض أنك تريد إرسال رسمٍ على قطعة ورق مُتَّسخة إلى حد ما بالبريد الإلكتروني إلى صديق. هناك الكثير من البقع السوداء الصغيرة بالإضافة إلى الرسم نفسه. يمكنك أنت أو أنا أن ننظر إلى الصورة ونرى على الفور أن البقع ليست ذات صلة، لكن جهاز الماسح الضوئي لا يمكنه ذلك. إنه فقط يمسح الصفحة سطرًا بسطر، ويمثل الصورة كسلسلة طويلة من الإشارات الثنائية السوداء/البيضاء، ولا يمكنه معرفة ما إذا كانت أي نقطة سوداء محددة جزءًا أساسيًّا من الرسم أو بقعة غير ذات صلة. قد تكون بعض «البقع» في الواقع مُقلةَ عين بقرة تقف على مسافة بعيدة، أو بقعًا على جسم صورة كرتونية لفهد.

إن العقبة الرئيسية هي أن إشارات الماسح الضوئي لا تمثل بيانات الصورة بطريقة تجعل من السهل التعرف على العناصر غير المرغوب فيها وإزالتها. ومع ذلك، هناك طرق أخرى لتمثيل البيانات. فيستبدل تحويل فورييه بأحد المنحنيات قائمة من السعات والترددات، مما يُشفِّر المعلومات نفسها بطريقة مختلفة. وعندما تُمثل البيانات بطرق مختلفة، فإن العمليات الصعبة أو المستحيلة في أحد التمثيلات قد تصبح سهلة في تمثيل آخر. على سبيل المثال، يمكننا البدء بمحادثة هاتفية، وتشكيل تحويل فورييه الخاص بها، واقتطاع جميع أجزاء الإشارة التي تحتوي مكونات فُورييه الخاصة بها على ترددات عالية جدًّا أو منخفضة جدًّا؛ بحيث لا تستطيع الأُذن البشرية سماعها. ثم يمكننا تطبيق التحويل العكسي على النتيجة للحصول على أصوات مماثِلة للأصل بالنسبة للأذن البشرية. يمكننا الآن إرسال المزيد من المحادثات عبر قناة الاتصال نفسها. ولا يمكننا القيام بذلك مباشرةً على الإشارة الأصلية غير المحولة؛ لأن هذا ليس له «تردد» كخاصية واضحة له.

بالنسبة لبعض الاستخدامات، فإن تقنية فورييه بها خطأ واحد: إن الجيوب وجيوب التمام المكونة لها تمتد إلى ما لانهاية. ويعاني تحويل فورييه عند محاولة التمثيل الدقيق لإشارة مضغوطة. تعد «النبضة» الواحدة إشارة بسيطة، ولكنها تتطلَّب مئات من الجيوب وجيوب التمام لإنتاج نبضة مقنِعة إلى حد ما. لا تكمن المشكلة في الحصول على الشكل الصحيح للنبضة، ولكن في جعل كل شيء خارج النبضة يساوي صفرًا. علينا التخلص من الذيول المتموِّجة الطويلة بلا نهاية لكل تلك الجيوب وجيوب التمام، وهو ما نفعله عن

طريق إضافة المزيد من الجيوب وجيوب التمام العالية التردد في محاولة يائسة لحذف العناصر غير المرغوب فيها. في النهاية، تصبح النسخة المحوَّلة أكثر تعقيدًا وتحتاج إلى بيانات أكثر من النبضة الأصلية.

يغير التحويل المويجي كل ذلك باستخدام النبضات باعتبارها مكوناته الأساسية. هذا ليس بالأمر السهل، ولا يمكنك فعل ذلك بأي نبضة قديمة، ولكن بالنسبة لعالم رياضيات فإن كيفية البدء واضحة. اختَر شكلًا محددًا من النبضات ليكون بمنزلة مُوَيجة «رئيسية». وَلِّد مويجات «فرعية» (وفرعية فرعية، وفرعية فرعية فرعية، إلخ) عن طريق تحريك المويجة الرئيسية بشكل جانبي إلى مواضع مختلفة، وتوسيعها أو ضغطها عن طريق تغيير المقياس. ولتمثيل دالة أكثر عمومية، نجمع المضاعفات المناسبة لهذه المويجات على مقاييس مختلفة. وبالطريقة نفسها، فإن منحنيات الجيب وجيب التمام الأساسية لفورييه هي «المويجات الرئيسية»، وجميع الجيوب وجيوب التمام التردُّدية الأخرى «مُويجات فرعية».



الشكل الأيمن: منحنى الجيب يمتد إلى الأبد. الشكل الأوسط: المويجة محددة النطاق. الشكل الأيسر: ثلاثة أجيال أخرى.

صُمِّمت المويجات لوصف البيانات الشبيهة بالنبضات بشكل فعال. وعلاوة على ذلك، نظرًا لأن المويجات الفرعية والفرعية الفرعية هي مجرد نُسخ تغيَّر مقياسها من المويجة الرئيسية، فمن الممكن التركيز على مستويات معينة من التفاصيل. إذا كنا نرغب في حذف بنية صغيرة الحجم، نحذف جميع المويجات الفرعية الفرعية في التحويل المويجي. تخيَّل

تحويل فهد إلى مويجات؛ نخصص بعض المويجات الكبيرة من أجل الجسم، ومُويجات أصغر للعينين والأنف والبُقع، ثم مويجات أصغر منها للشعر. ولضغط البيانات مع الحفاظ على شكل الفهد، علينا أن نقرر أن الشعرات الفردية لا تهم، ونزيل تلك المويجات الفرعية الفرعية. ستبقى البقع، ولا تزال الصورة تشبه الفهد. لا يمكننا فعل ذلك بالسهولة نفسها باستخدام تحويل فورييه — هذا إذا كان بإمكاننا استخدامه في تنفيذه من الأساس.

كانت معظم الأدوات الرياضية اللازمة لتطوير المويجات موجودة في شكل مجرد لمدة نصف قرن أو أكثر، في مجال باناخ الخاص بالتحليل الدالي. وعندما ظهرت المويجات، اتَّضح أن الآلية الغامضة للتحليل الدالي هي بالضبط ما كان مطلوبًا لفهمها وتطويرها إلى تقنية فعَّالة. كان الشرط المسبَق الأساسي لآلة التحليل الدالي، كي تعلن عن وجودها، هو شكل جيد للمويجة الرئيسية. نريد أن تكون جميع المويجات الفرعية مستقلة رياضيًّا عن المويجة الرئيسية، مع عدم وجود تداخل في المعلومات المشفرة من قِبَل المويجة الرئيسية والمويجات الفرعية، وعدم وجود جزء متكرر من أي مويجة فرعية. في مصطلحات التحليل الدالي، يجب أن تكون المويجة الرئيسية والفرعية متعامدتين.

في أوائل الثمانينيات من القرن الماضي، توصَّل عالم الجيوفيزياء جان مورليه وعالم الفيزياء الرياضية ألكسندر جروسمان إلى مويجة رئيسية صالحة. وفي عام ١٩٨٥، حسَّن عالم الرياضيات إيف ماير مويجات مورليه وجروسمان. أما الاكتشاف الذي فتح المجال بأكمله على مصراعيه فحدث في عام ١٩٨٧ على يد إنجريد دوبشي. لقد بدت المويجات الرئيسية السابقة بشكل مناسب مثل النبضة، لكن كان لدى جميعها ذيلٌ رياضي صغير للغاية يمتد إلى ما لا نهاية. لكن دوبشي أنشأت مويجة رئيسية دون ذيل على الإطلاق؛ خارج مدة ما، تكون المويجة الرئيسية دائمًا صفرًا بالضبط. كانت مويجتها الرئيسية نبضة حقيقية، محصورة بالكامل في منطقة منتهية من الفراغ.

تعمل المَويجات كنوع من عدسة التكبير/التصغير العددي، مع التركيز على سمات البيانات التي تشغل مقاييس مكانية معينة. يمكن استخدام هذه القدرة لتحليل البيانات، وأيضًا لضغطها. من خلال معالجة التحويل المويجي، الكمبيوتر «يُحدِّق مُضيِّقًا عينيه» في الصورة ويتجاهل مقاييس دقة الوضوح غير المرغوب فيها. هذا ما قرر مكتب التحقيقات الفيدرالي القيام به في عام ١٩٩٣. في ذلك الوقت، احتوت قاعدة بيانات البصمات الخاصة بالمكتب على ٢٠٠ مليون سجل، جرى تخزينها كبصمات بالحبر على بطاقات ورقية، ثم

أُجري تحديث للسجلات عن طريق رقمنة الصور وتخزين النتائج على جهاز كمبيوتر. إحدى الميزات الواضحة هنا هي القدرة على البحث بسرعة عن البصمات التي تتطابق مع تلك الموجودة في مسرح الجريمة.

تنشئ الصورة التقليدية ذات دقة الوضوح الكافية ملفًّ كمبيوتر يبلغ حجمه عشرة ميجابايت لكل بطاقة بصمات أصابع. ويشغل أرشيف مكتب التحقيقات الفيدرالي ٢٠٠٠ تيرابايت من الذاكرة. ويُستقبل ما لا يقل عن ٣٠ ألف بطاقة جديدة كل يوم، ومن ثَم فإن متطلبات التخزين تزداد بمقدار ٢٫٤ تريليون رقم ثنائي كل يوم. لذا أصبح مكتب التحقيقات الفيدرالي في أمس الحاجة إلى ضغط البيانات. وقد جربوا تنسيق JPEG، لكنه يصبح عديم الفائدة مع بصمات الأصابع (على عكس لقطات العطلات) عندما تكون «نسبة الضغط» — نسبة حجم البيانات الأصلية إلى حجم البيانات المضغوطة — عالية، حوالي ١٠:١. حينها، تصبح الصور غير المضغوطة غير مرضية بسبب «أخطاء ناتجة عن التقسيم إلى مربعات»؛ حيث يترك التقسيم الفرعي إلى كتل ٨ × ٨ حدودًا ملحوظة. بطبيعة الحال، لم تكن هذه الطريقة مفيدة كثيرًا لمكتب التحقيقات الفيدرالي إلا إذا تمكنت من تقديم نِسَب ضغط تصل على الأقل إلى ١٠:١. لا تعتبر الأخطاء الناتجة عن التقسيم إلى مربعات مجرد مشكلة جمالية؛ فهي تُضعف بشكل خطير قدرة الخوارزميات على البحث عن البصمات المطابقة. كما تقدم الطرق البديلة المستنِدة إلى عمل فورييه أخطاءً مرفوضة، ويمكن إرجاعها جميعًا إلى مشكلة «الذيول» اللانهائية في جيوب وجيوب التمام الخاصة بفورييه. لذلك قرر توم هوبر من مكتب التحقيقات الفيدرالي وجوناثان برادلي وكريس بريسلون من مختَبَر لوس ألاموس الوطني تشفير سجلات البصمات الرقمية عن طريق المويجات، باستخدام طريقة تُعرف باسم التكميم العددي/المويجي.

بدلًا من إزالة المعلومات المتكررة عن طريق إنشاء أخطاء ناتجة عن التقسيم إلى مربعات، تزيل طريقة التكميم العددي/المويجي التفاصيل الدقيقة عبر الصورة؛ التفاصيل الدقيقة جدًّا بحيث تكون غير مهمة لقدرة العين على التعرف على بِنية بصمة الإصبع. في تجارب مكتب التحقيقات الفيدرالي، تفوَّقت ثلاث طرق مويجية مختلفة على طريقتين لفورييه مثل تنسيق JPEG. وعلى نحوٍ إجمالي، ظهرت طريقة التكميم العددي/المويجي باعتبارها الطريقة الأكثر منطقية. فهي توفر نسبة ضغط لا تقل عن ١٥:١، مما يقلل من تكلفة ذاكرة التخزين بنسبة ٩٣٪. وقد أصبحت تلك الطريقة الآن معيارَ تبادلِ وتخزين صور بصمات الأصابع. وتستخدمها معظم وكالات إنفاذ القانون الأمريكية مع صور

بصمات الأصابع المضغوطة بمعدل ٥٠٠ بكسل في البوصة. وبالنسبة لبصمات الأصابع الأعلى دقةَ وضوحٍ، فهي تستخدم تنسيق JPEG.[2]




بصمة أصابع قبل وبعد ضغطها. الشكل الأيمن: البصمة الأصلية. الشكل الأيسر: البصمة بعد الضغط إلى ١ / ٢٦ من حجم بياناتها الأصلي.

لقد أصبحت المويجات مستخدمة في كل المجالات تقريبًا. فقد طبق فريق دينيس هيلي أساليب تحسين الصور القائمة على المويجات في عمليات الفحص بالتصوير المقطعي، والتصوير المقطعي بالإصدار البوزيتروني والتصوير بالرنين المغناطيسي. واستخدموا أيضًا المويجات لتحسين الاستراتيجيات التي تحصل بها أجهزة الأشعة على بياناتها في المقام الأول. كما استخدمها رونالد كويفمان وفيكتور فيكرهاوزر لإزالة الضوضاء غير المرغوب فيها من التسجيلات الصوتية. وتمثل أحد الإنجازات في هذا الشأن في تحسين التسجيل الصوتي لأداء يوهانس برامس وهو يعزف إحدى مقطوعات «رقصات مجرية» الخاصة به، التي سُجلت في الأصل على أسطوانة شمعية في عام ١٨٨٩، والتي ذابت جزئيًّا. وقد أعيد تسجيلها على قرص بسرعة ٧٨ دورة في الدقيقة. لقد بدأ كويفمان عمله من بث إذاعي للمقطوعة، وحينها كانت الموسيقى غير مسموعة تقريبًا وسط الضوضاء المحيطة. وبعد تنقية الصوت باستخدام المويجات، أصبح بالإمكان سماع ما كان برامس يعزفه؛ ليس على نحو مثالي، لكن كان يمكن سماعه.

قبل أربعين عامًا، كان التحليل الدالِّي مجرد مجال غامض آخر للرياضيات البحتة التي كانت تطبيقاتها الرئيسية في الفيزياء النظرية. لكن التوصل إلى المويجة غيَّر كل ذلك. يوفر التحليل الدالِّي الآن الأُسُس اللازمة لتطوير أنواع جديدة من المويجات بسِماتٍ خاصة تجعلها مهمة في التكنولوجيا والعلوم التطبيقية. تؤثر المويجات على نحو غير مرئي على جوانب عديدة من حياتنا اليوم؛ فهي تُستخدم في مجال منع الجريمة، والطب، وفي تطوير الجيل القادم من الموسيقى الرقمية. وغدًا سوف تستخدم في كل المجالات.

الفصل الحادي عشر

هل اقتربنا من الوصول إلى هناك؟

رحلة الألف ميل تبدأ بخطوة واحدة.

لاو-تزو، كتاب «طريق لاو-تزو»

كل والد يقود سيارته يعرف هذا السيناريو. تتجه العائلة لزيارة الجدة التي يقع بيتها على بعد ثلاثمائة ميل يستغرق قطعها ست ساعات. ويجلس الأطفال في المقعد الخلفي. ثم بعد نصف ساعة من بداية الرحلة تأتي الصيحة الحزينة: «هل اقتربنا من الوصول إلى هناك؟»

لديَّ خلاف مع أبناء عمومتي في الجانب الآخر من المحيط الأطلنطي في أمريكا، الذين يبدو أنهم مقتنعون بأن السؤال الصحيح هو: «هل وصلنا إلى هناك؟» لا شك أنه كذلك، في أمريكا، لكن لا ينبغي أن يصبح هكذا؛ لأن هذه الصيغة ناتجة بوضوح عن سوء فهم. دائمًا ما تكون الإجابة على النسخة الثانية واضحة: إما أننا وصلنا، فيكون السؤال غير ضروري، أو لم نصل، ولذلك لا جدوى من السؤال. كلا، ما يحدث هو أنه في أي رحلة طويلة، عندما يشاكس الأطفال، فإن الوالد اللطيف (أو ربما المنزعج فقط) يحاول تهدئتهم. فيقول لهم: «لقد اقتربنا من الوصول إلى هناك.» حتى لو كانت الرحلة ستستمر لخمس ساعات أخرى. إن هذه الإجابة تسكتهم لبعض الوقت. على أي حال، بعد عدة رحلات، يبدأ الأطفال في إلقاء تلميحات لطيفة تدل على اليأس بدلًا من الأمل: «هل اقتربنا من الوصول إلى هناك؟» وهذا سؤال معقول؛ لأنه لا يمكنك معرفة ذلك من خلال النظر عبر النافذة. هذا ما لم تكن تعرف معالم الطريق بالطبع. كانت لدينا قطة تستطيع فعل ذلك.

هل اقتربنا من الوصول إلى هناك؟ أين نحن؟ قبل عقدين من الزمن، كنا بحاجة إلى خريطة، ومهارات جيدة في قراءة الخرائط، وشخص يقودنا من المقعد المجاور لمقعد

السائق لمعرفة ذلك. أما اليوم، فتلك المهمة مُوكَلة بالكامل لأدوات إلكترونية. فنحن نستخدم جهاز مِلاحة بالأقمار الصناعية. صحيح أن البعض أحيانًا قد يجده نفسه وسط أحد الحقول. حيث سارت إحدى السيارات في نهر مؤخرًا، بفضل توجيهات من جهاز الملاحة بالأقمار الصناعية. فنحن نحتاج إلى النظر إلى الطريق أيضًا. لكن حتى هذا يمكن أن يؤدي لوقوع خطأ. لقد انتهى بنا المطاف في العام الماضي داخل نطاق منزل ريفي عندما كنا نبحث عن فندق صغير، لأن الجهاز لم يتمكن من تحديد الفرق بين طريق حقيقي بدا مثل مدخل منزل، ومدخل منزل بدا وكأنه طريق حقيقي.

إن الملاحة باستخدام الأقمار الصناعية أشبه بالسحر. إذ لدينا شاشة في السيارة تعرض جزءًا من خريطة. وتُظهر الخريطة موقعنا بالضبط. وأثناء القيادة، تتحرك الخريطة بحيث يكون رمز سيارتك دائمًا في المكان الصحيح. ويعرف الجهاز الاتجاه الذي تتجه فيه، واسم أو رقم الطريق الذي تسلكه حاليًّا. وينبهك إلى أماكن الازدحام المروري. إنه يعرف إلى أين أنت ذاهب، ومدى سرعتك، ومتى تتجاوز الحد الأقصى للسرعة، وأين توجد كاميرات المرور، والمدة التي تستغرقها قبل أن تصل إلى هناك. درِّب الأطفال على قراءة كل ذلك، ولن يحتاجوا إلى السؤال مرة أخرى أبدًا عما إذا كنتم قد اقتربتم من الوصول لوجهتكم أم لا.

لقد كتب كاتب الخيال العلمي العظيم وعالم المستقبليات آرثر سي كلارك قائلًا: «إن أي تقنية متقدمة بما فيه الكفاية لا يمكن تمييزها عن السحر.» وقد أعاد كاتب خيال علمي آخر، وهو جريجوري بينفورد، صياغة تلك العبارة على النحو التالي: «إن أي تقنية يمكن تمييزها عن السحر ليست متقدمة بما فيه الكفاية». وجهاز الملاحة بالأقمار الصناعية متقدم بما فيه الكفاية، لكنه ليس ضربًا من السحر. إذن كيف يعمل؟

إنه يعرف إلى أين أنت ذاهب لأنك أخبرته بذلك. لقد لمست الحروف والأرقام على الشاشة. هذا الجزء واضح. إنه أيضًا الجزء «الوحيد» الواضح. يعتمد السحر المتبقي على التكنولوجيا العالية؛ الأقمار الصناعية التي تدور في مدارات حول الأرض، التي هناك الكثير منها؛ والإشارات اللاسلكية، والشفرات؛ والأعداد شبه العشوائية، والكثير من معالجة الكمبيوتر الذكية. وهناك أيضًا الخوارزميات التي تسعى للعثور على المسار الأسرع/الأرخص/الأقل إضرارًا بالبيئة. والفيزياء الأساسية مهمة للغاية: الميكانيكا المدارية القائمة على قانون الجاذبية لنيوتن، والمدعومة بنظرية النسبية الخاصة لأينشتاين وكذلك نظريته العامة، التي طورت عمل نيوتن. تدور الأقمار الصناعية في الفضاء، وتنقل إشارات

التوقيت؛ وبالنسبة لك، يحدث كل شيء تقريبًا في شريحة كمبيوتر صغيرة. هذا بالإضافة إلى بعض شرائح الذاكرة لتخزين الخريطة وما إلى ذلك.

ونحن لا نرى أيًّا من هذه الأشياء، لذلك نرى سحرًا بدلًا من ذلك.

وغنيٌّ عن القول أن جانبًا كبيرًا من هذا السحر قائم على الرياضيات، ويتطلب جرعات ضخمة من أنواع عديدة منها، ناهيك عن كميات هائلة من الفيزياء والكيمياء وعلوم المواد والهندسة. أحيانًا، قد يكون العلاج النفسي أيضًا فكرة جيدة لبعض المستخدمين، ولكن هذه قصة أخرى.

إذا تجاهلنا تصنيع وتصميم الأقمار الصناعية، والتكنولوجيا المطلوبة لإطلاقها في الفضاء، فإن الملاحة بالأقمار الصناعية لا تزال تتضمَّن سبعة مجالات على الأقل من الرياضيات، ولن تعمل دونها. إن المجالات التي أفكر بها هي:

- حساب مسارات صواريخ الإطلاق لوضع الأقمار الصناعية في المدارات الخاصة بها؛
- تصميم مجموعة من المدارات التي توفر تغطية جيدة: يجب أن تكون ثلاثة أقمار صناعية على الأقل، ويفضل أكثر من ذلك، مرئيةً من أي موقع معين في أي وقت؛
- استخدام مُولِّد أعداد شبه عشوائية لإنشاء الإشارات، مما يجعل من الممكن قياس مدى بُعد كل قمر صناعي بدقة شديدة؛
- استخدام حساب المثلثات والبيانات المدارية لاستنتاج موقع سيارتك؛
- استخدام معادلات النسبية الخاصة لتصحيح حسابات تأثير السرعات العالية للأقمار الصناعية على مرور الوقت؛
- استخدام معادلات النسبية العامة لتصحيح حسابات تأثير جاذبية الأرض على مرور الوقت؛
- حل أحد أشكال مسألة البائع المتجول لإيجاد أفضل مسار وفقًا للمعيار الذي حددته: سريع، وقصير، وصديق للبيئة.

سأناقش معظم هذه المجالات بمزيد من التفصيل خلال الصفحات القليلة القادمة، مع التركيز على أكثرها إثارة للدهشة.

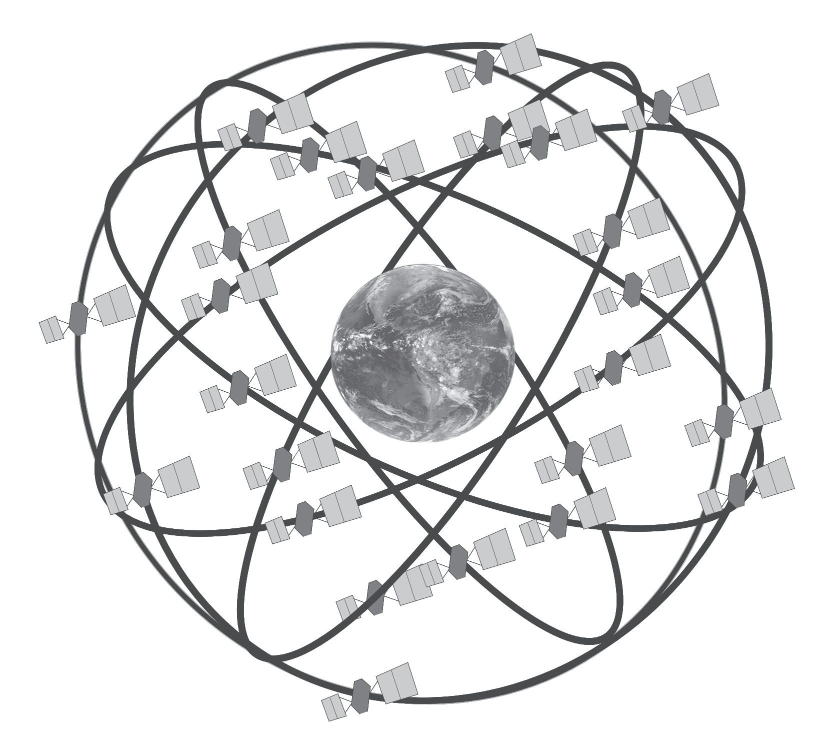
يعتمد جهاز الملاحة بالأقمار الصناعية على إشارات توقيت دقيقة للغاية تنتجها ساعات ذرِّية عالية الدقة، مرسلة من عدد من الأقمار الصناعية المدارية الخاصة. إن ساعة

السيزيوم، التي تترك لتحكم أجهزتها الخاصة، تبلغ دقتها حتى ٥ أجزاء في ١٠١٤، أو ٤ نانوثوانٍ في اليوم. هذا يناظر خطأً في موقعك بحوالي متر في اليوم. وللتعويض عن هذا الانحراف التدريجي، تتم إعادة ضبط الساعات بشكل دوري من المحطة الأرضية. وهناك مصادر أخرى لأخطاء التوقيت، وسأعود إليها لاحقًا.

توجد الآن العديد من أنظمة الملاحة بالأقمار الصناعية، لكنني سأركز على أسبقها ظهورًا وأكثرها استخدامًا، وهو نظام تحديد المواقع العالمي (جي بي إس). لقد بدأ هذا المشروع في عام ١٩٧٣، تحت رعاية وزارة الدفاع الأمريكية. وجوهر هذا النظام هو مجموعة من الأقمار الصناعية المدارية؛ وكان عددها في البداية ٢٤، والآن أصبحت ٣١. لقد انطلق أول قمر صناعي منها في عام ١٩٧٨، وبدأ تشغيل المجموعة الكاملة في عام ١٩٩٣. في البداية، كان النظام مقصورًا على الاستخدامات العسكرية، ولكن الرئيس رونالد ريجان أصدر الأمر التنفيذي لعام ١٩٨٣، الذي جعله متاحًا للمدنيين في شكل ذي دقة أقل. إن هذا النظام في طور التحديث، وتقوم العديد من الدول الآن بتشغيل أنظمة تحديد المواقع بالأقمار الصناعية الخاصة بها، بدايةً من نظام الملاحة العالمي بالأقمار الصناعية (جلوناس) الخاص بروسيا، بدقة تصل إلى مترين. وفي عام ٢٠١٨، بدأت الصين نظام الملاحة بالأقمار الصناعية الخاص بها المُسمَّى بايدو، الذي يجب أن يكون قيد التشغيل في أي لحظة. وهناك أيضًا نظام الاتحاد الأوروبي المسمى جاليليو. وقد غادرت بريطانيا الآن الاتحاد الأوروبي ولن تشارك في نظام جاليليو، ولكن في انتصار للأيديولوجية على المنطق السليم، أعلنت حكومة المملكة المتحدة أن بريطانيا ستطور وتطلق نظامها الخاص. وتقوم الهند بإعداد نظام نافيك، وتنشئ اليابان نظام الأقمار الصناعية شبه السمتي (كيو زد إس إس)، الذي سيُنهي الاعتماد على نظام تحديد المواقع العالمي بحلول عام ٢٠٢٣.

من الناحية التشغيلية، يتكون نظام تحديد المواقع العالمي من ثلاثة «قطاعات»: الفضاء (الأقمار الصناعية)، والتحكم (المحطات الأرضية)، والمستخدم (أنت في سيارتك). ترسل الأقمار الصناعية إشارات توقيت. ويراقب قطاع التحكم مدارات الأقمار الصناعية ودقة ساعاتها، وإذا لزم الأمر، يرسل تعليمات لتعديل المدار وإعادة ضبط الساعة. ويمتلك المستخدم جهاز استقبال رخيص الثمن منخفض الطاقة صغير الحجم بما يكفي ليناسب الهاتف المحمول، لإخبار التطبيقات بمكانها.

يُطلق على مجموعة الأقمار الصناعية عمومًا اسم «كوكبة»، وهو الاسم المتعارف عليه منذ القدم لترتيب مجموعة نجوم في سماء الليل. وتتكون كوكبة نظام تحديد المواقع



كوكبة نظام تحديد المواقع العالمي الأصلية المكونة من ٢٤ قمرًا صناعيًّا، أربعة منها في كلٍّ من ستة مدارات منفصلة.

العالمي الأصلية من ٢٤ قمرًا صناعيًّا، كل منها في مدار دائري تقريبًا ٢٠٢٠٠ كيلومتر (١٢٦٠٠ ميل) فوق الأرض، أو ٢٦٦٠٠ كيلومتر (١٦٥٠٠ ميل) من مركزها. سأتجاهل لاحقًا الأقمار الصناعية الإضافية، التي لا تؤثر على الأفكار الرئيسية؛ فهي تجعل النظام أكثر موثوقية وأكثر دقة. هناك ستة مدارات، في مستويات تقابل خط الاستواء بزاوية ٥٥ درجة، متباعدة بالتساوي حول خط الاستواء. ويشغل كل مدار أربعة أقمار صناعية متباعدة بشكل متساوٍ، يقتفي أثرَ بعضها البعضُ بشكل دائم. يُحدَّد نصف قطر المدار باستخدام رياضيات المدارات، بحيث يعود القمر الصناعي إلى الموضع نفسه في مداره كل ١١ ساعة و٥٨ دقيقة. هذا يضمَّن أنه سيوجد تقريبًا فوق الموقع نفسه على الأرض مرتين يوميًّا، مع انحرافه ببطء.

السمة الرياضية التالية هي هندسة المدارات. يعني هذا التكوين للأقمار الصناعية والمدارات أنه في أي وقت محدد يمكن رؤية ستة من الأقمار الصناعية على الأقل (أي، يمكن استقبال الإشارات منها) من أي نقطة على هذا الكوكب. ويعتمد تحديد ما هي تلك الأقمار الستة على مكان وجود الشخص، وتتغير هذه المجموعة مع مرور الوقت، لأن الأرض تدور والأقمار الصناعية تدور في مداراتها.

لقد صُمم نظام تحديد المواقع العالمي بحيث لا يحتاج المستخدمون إلى إرسال أي معلومات إلى الأقمار الصناعية. بدلًا من ذلك، لديهم جهاز استقبال يلتقط إشارات التوقيت من الأقمار الصناعية المرئية. ويعالج جهاز الاستقبال بيانات التوقيت لمعرفة مكانها. والمبدأ الأساسي بسيط، لذلك دعونا نلقِ نظرة عليه أولًا. ثم سأشير إلى بعض التعديلات اللازمة لجعله يعمل في العالم الحقيقي.

لنبدأ بقمر صناعي واحد. إنه يرسل لك إشارات توقيت، ومن خلالها يعمل جهاز الاستقبال الخاص بك على تحديد مدى بُعد الأقمار الصناعية في تلك اللحظة. (سنرى لاحقًا كيف يتم هذا.) ربما تبلغ هذه المسافة ٢١ ألف كم. تضعك هذه المعلومة على سطح كرة مركزها القمر الصناعي ونصف قطرها يبلغ ٢١ ألف كم. هذا ليس مفيدًا للغاية وحده، ولكن يمكن رؤية خمسة أقمار صناعية أخرى على الأقل في اللحظة نفسها. اسمح لي أن أشير إليها على أنها القمر الصناعي ٢، القمر الصناعي ٣، وهكذا، حتى القمر الصناعي ٦. كل منها يرسل إشارات تستقبلها أنت في وقت واحد، وكل إشارة تضعك في كرة أخرى، مركزها أيضًا القمر الصناعي، وهكذا لديك الكرات ٢ و٣ و٤ و٥ و٦. الإشارة من القمر الصناعي ٢، جنبًا إلى جنب مع تلك الصادرة من القمر الصناعي ١، تضعك على تقاطع الكُرَتين ١ و٢، الذي هو عبارة عن دائرة. يساهم القمر الصناعي ٣ بكُرة أخرى تتقاطع مع الكرة ١ في دائرة أخرى. وتتقاطع الدائرتان عند نقطتين، تقع كل منهما في الكرات الثلاث. وتوفر الإشارة من القمر الصناعي ٤ الكرة ٤، التي تميز بشكل عام أي النقطتين هي موقعك الصحيح.

في عالم مثالي، يمكننا التوقف عند هذا الحد، وسيصبح القمران ٥ و٦ غير ضروريين. لكن في الواقع، الأمر ليس بهذه البساطة. فكل شيء عُرضة للأخطاء. يمكن أن يؤدي الغلاف الجوي للأرض إلى تدهور الإشارة، وقد يكون هناك تداخل كهربائي، أيًّا كان. بدايةً، هذا يعني ضِمنًا أن موقعك «قريب» من الكرة المعنية، وليس عليها. وبدلًا من سطح الكرة، يقع موضعك داخل طبقة سميكة تحتوي على السطح. لذا، يمكن لأربعة أقمار صناعية وأربع إشارات أن تحدد موقعك بمستوًى معين من الدقة، ولكن ليس بشكل مثالي.

للقيام بعمل أفضل، يستخدم نظام تحديد المواقع العالمي القمرين الصناعيين الإضافيين. حيث تقلل كرتاهما السميكتان منطقة موقعك المحتملة أكثر. في هذه المرحلة، من شبه المؤكد أن المعادلات التي تحدد موقعك تكون غير متَّسقة إذا تجاهلتَ الأخطاء المحتملة، ولكن باستعارة حيلة قديمة من علم الإحصاء، يمكنك الحصول على أفضل تقدير لمركزك عن طريق تقليل الخطأ الكلي. وهذا ما يطلق عليه «طريقة المربعات الصغرى»، التي قد قدَّمها جاوس في عام ١٧٩٥.

والمحصلة هي أن جهاز استقبال نظام تحديد المواقع العالمي الخاص بك عليه فقط إجراء سلسلة منتظمة من الحسابات الهندسية البسيطة نسبيًّا، ينتج عنها أفضل تقدير يمكن أن يقوم به لموقعك. ومن خلال مقارنة ذلك بالشكل التفصيلي للأرض، يمكنه حتى معرفة مدى ارتفاعك بالنسبة إلى مستوى سطح البحر. وعملية تحديد الارتفاعات عمومًا هي أقل دقة من تحديد مواقع خطوط الطول/العرض.

قد تبدو عملية إرسال إشارات التوقيت بسيطة، لكنها ليست كذلك. إذا سمعتَ هَزيم الرعد، فأنت تعلم أن هناك عاصفة في الجوار، لكن الهزيم وحده لا يخبرك بمدى بُعدها عنك. إذا رأيت أيضًا البرق، الذي يصل قبل هزيم الرعد، لأن الضوء ينتقل أسرع من الصوت، يمكنك استخدام فارق الوقت بين الإشارتين لتقدير مدى بُعد البرق؛ القاعدة الأساسية هي خمس ثوانٍ لكل ميل. ومع ذلك، فإن سرعة الصوت تعتمد على حالة الغلاف الجوي، لذا فإن هذه القاعدة ليست دقيقة تمامًا.

إن نظام تحديد المواقع العالمي ليس بإمكانه استخدام الموجات الصوتية كإشارة ثانية، لأسباب واضحة؛ فهي بطيئة جدًّا، والفضاء عبارة عن فراغ، لذلك لا يمكن للصوت أن ينتقل فيه بأي طريقة. لكن الفكرة الأساسية، المتمثلة في أنك تستنتج فرقًا زمنيًّا من خلال مقارنة إشارتين مختلفتين لكن مترابطتين، تشير إلى الاتجاه الصحيح. حيث يرسل كل قمر صناعي تسلسلًا من نبضات ٠ / ١ لا تحتوي على تكرارات، إلا إذا انتظرت وقتًا طويلًا جدًّا حتى يتكرر التسلسل بأكمله. يمكن لجهاز استقبال نظام تحديد المواقع العالمي مقارنة سلسلة ٠ و١ التي يحصل عليها من القمر الصناعي مع نفس السلسلة التي ينتجها مصدر محلي. تتأخر إشارة القمر الصناعي لأنه يتعين عليها تغطية المسافة بين القمر الصناعي وجهاز الاستقبال، ويمكننا استنتاج التأخير الزمني عن طريق محاذاة الإشارتين وتحديد المسافة التي يجب إزاحة إحداها خلالها لمطابقة الأخرى.

يمكننا توضيح هذه العملية باستخدام كلمات بدلًا من ٠ و١.

لنفترض أن الإشارة المستلمة من القمر الصناعي هي:

aligning the signals and seeing how far one

بينما في الوقت نفسه، الإشارة المرجعية من أسفل الطريق هي:

seeing how far one has to be displaced

إذن، يمكننا إزاحة الإشارة المحلية حتى تتفق الكلمات، على النحو التالي:

aligning the signals and seeing how far one
seeing how far one has to be displaced

الآن يمكننا أن نرى أن إشارة القمر الصناعي تصل متأخرة بأربع كلمات عن الإشارة المحلية.

كل ما تبقَّى الآن هو إنشاء سلاسل بت مناسبة. هناك طريقة بسيطة لإنشاء سلاسل من ٠ و١ مع تكرارات نادرة جدًّا، وهي رمي عملة معدنية ملايين المرات وتسجيل ٠ لأحد الوجهين و١ للوجه الآخر. يظهر كل بت باحتمال ١ / ٢، لذا فإن سلسلة معينة من ٥٠ بتًّا، على سبيل المثال، تحدث باحتمال ١ / ٢،[1] وهو ما يمثل فرصة واحدة تقريبًا في كل كوادريليون. في المتوسط، إنها ستكرر حوالي كوادريليون خطوة على طول السلسلة. عندما نقارن مثل هذه الإشارة بنسخة تمت إزاحتها بمقدار أقصر بكثير، فإن الإزاحة «الصحيحة»، التي تعطي أفضل تطابق، تكون فريدة.

ومع ذلك، فإن أجهزة الكمبيوتر ليست جيدة في استخدام طريقة رمي العملات المعدنية. إنها تتبع تعليمات محددة، ويجب أن تفعل ذلك بدقة ودون أخطاء. لحسن الحظ، هناك عمليات رياضية دقيقة يمكن أن تولد سلاسل من البتات التي تبدو عشوائية، بأي معنًى إحصائي معقول، حتى لو كان الإجراء الفعلي حتميًّا. تُعرف هذه الطريقة بمولِّد الأعداد شبه العشوائية. وهذا هو العنصر الرياضي الرئيسي الثالث في نظام تحديد المواقع العالمي.

عمليًّا، يُدمَج تدفق البتات من مولِّد الأعداد شبه العشوائية مع البيانات الأخرى التي يتطلبها نظام تحديد المواقع العالمي، وهي تقنية تُسمى التعديل. حيث يبث القمر

الصناعي بياناته بمعدل بطيء نسبيًّا، ٥٠ بتًا في الثانية. وهو يجمع بين هذه الإشارة وتدفُّق بتات أسرع بكثير من مولد الأعداد شبه العشوائية، بمعدل يزيد عن مليون «تشيب» (chip) في الثانية. إن التشيب تشبه «البت» إلى حد كبير، ولكنها تأخذ القيمتين +١ أو −١ بدلًا من ٠ أو ١. فيزيائيًّا، إنها نبضة موجة مربعة بسعة +١ أو −١. ويعني «التعديل» أن سلسلة البيانات الأصلية تُضرب في قيمة التشيب في كل لحظة. ونظرًا لأن البيانات الأخرى تتغير ببطء شديد بالمقارنة، إن تقنية «التحريك والمطابقة» لا تزال تعمل بشكل جيد بما فيه الكفاية، ولكن في بعض الأحيان تكون المطابقة تامة، وأحيانًا تكون إحدى الإشارتين عكس الأخرى. باستخدام طريقة الارتباط الإحصائية، علينا فقط تحريك الإشارتين حتى يصبح الارتباط عاليًا بدرجة كافية.

في الواقع، يقوم نظام تحديد المواقع العالمي بالشيء نفسه مرة أخرى مع عدد شبه عشوائي آخر، حيث يُعدِّل الإشارة بمعدل أسرع بعشر مرات. يُطلق على التعديل الأبطأ «شفرة الاكتساب الخشن»، وهو مخصص للاستخدام المدني. أما التعديل الأسرع، «الشفرة الدقيقة»، فهو مخصص للجيش. كما أنه مشفر، ويستغرق سبعة أيام لتكرار نفسه.

تعتمد مولدات الأعداد شبه العشوائية بشكل عام على مفاهيم الجبر المجرد، مثل كثيرات حدود الحقول المنتهية، أو نظرية الأعداد، مثل الأعداد الصحيحة بمقياس ما. مثال بسيط على هذا النوع الأخير هو مولد تطابُقي خطِّي. اختر مقياسًا ما m، وعددين a و$b \pmod{m}$، وعدد بداية $x_1 \pmod{m}$. ثم عرِّف الأعداد المتتالية x_2 وx_3 وx_4، وهكذا، من خلال الصيغة التالية:

$$x_{n+1} = ax_n + b \pmod{m}$$

إن تأثير a هو ضرب العدد الحالي x_n في عامل ثابت a، وبعد ذلك تحرك b تلك القيمة بمقدار ثابت. هذا يعطي العدد التالي في التسلسل؛ وهكذا. على سبيل المثال، إذا كانت $m = 17$، و$a = 3$، و$b = 5$، و$x_1 = 1$، فسنحصل على التسلسل التالي:

١ ٨ ١٢ ٧ ٩ ١٥ ١٦ ٢ ١١ ٤ ٠ ٥ ٣ ١٤ ١٣ ١٠

الذي يتكرر بعد ذلك إلى ما لا نهاية. ليس لهذا أنماط واضحة للعين. عمليًّا، بالطبع، نحن نجعل m أكبر بكثير. وهناك بعض الشروط الرياضية التي تضمن أن التسلسل يستغرق وقتًا طويلًا في التكرار، وأنه يفي باختبارات إحصائية معقولة للعشوائية. على

سبيل المثال، بعد تحويل الناتج إلى الصيغة الثنائية، يجب أن يظهر كل عدد $(\mathrm{mod}\ m)$ بوتيرة متساوية، في المتوسط؛ وكذلك كل سلسلة من ٠ و١ من طول معين، حتى حجم معقول.

إن المولدات التطابُقية الخطية بسيطة للغاية بحيث لا يمكن أن تكون آمنة، وقد ابتُكرت بدائل أكثر تعقيدًا. مثال على ذلك مولد «ميرسين تويستر»، الذي اخترعه ماكوتو ماتسوموتو في عام ١٩٩٧. وهو موجود لدى الكثير منكم، نظرًا لأنه مستخدم في عشرات حِزَم البرمجيات القياسية، من بينها جداول بيانات برنامج إكسل الخاص بمايكروسوفت. يجمع هذا المولد بين الأعداد الأولية، مما يجعل الجوانب الرياضية أسهل، وبين تعبيرات ثنائية لطيفة، مما يجعل العمليات الحسابية أسهل. وعدد ميرسين الأوَّلي هو عدد أولي على الصيغة $2^p - 1$ (حيث p عدد أولي)، مثل ٣١ = $٢^{٥}$ − ١ أو ١٣١٠٧١ = $٢^{١٧}$ − ١. وتعد أعداد ميرسين الأولية نادرة، ولا نعرف حتى ما إذا كان هناك عدد لا نهائي منها. في يناير ٢٠٢١، جرى التعرف على ٥١ من أعداد ميرسين الأولية، أكبرها $٢^{٨٢٥٨٩٩٣٣}$ − ١.

وعند التعبير عنهما باستخدام النظام الثنائي، فإن عددي ميرسين الأوليَّين الموضحين أعلاه يصبحان كما يلي:

٣١ = ١١١١١   ١٣١٠٧١ = ١١١١١١١١١١١١١١١١١

مع ٥ و١٧ تكرارًا للرقم ١، على التوالي. هذا يجعل من السهل على الكمبيوتر الرقمي إجراء العمليات الحسابية باستخدامهما. يعتمد هذا المولد على عدد ميرسين أوَّلي كبير جدًّا، وعادة ما يكون $٢^{١٩٩٣٧}$ − ١، ويستبدل بالأرقام الموجودة في التطابُق مصفوفات في الحقل بعنصرين ٠ و١. وهو يلبي الاختبارات الإحصائية للسلاسل الفرعية التي يصل طولها حتى إلى ٦٢٣ بتًا.

تتضمن إشارة نظام تحديد المواقع العالمي أيضًا إشارة ذات تردد أقل بكثير تقدم معلومات حول مدار القمر الصناعي، وتصحيحات الساعة الخاصة به، وعوامل أخرى تؤثر على حالة النظام. قد يبدو هذا معقدًا للغاية، وهو كذلك بالفعل، لكن الأجهزة الإلكترونية الحديثة يمكنها التعامل مع التعليمات المعقدة للغاية دون خطأ. وهناك أسباب وجيهة لهذا التعقيد. إنه يساعد جهاز الاستقبال على تجنب التتبُّع العرضي لإشارة عشوائية أخرى تَصادف أنها تُبث في ذلك الوقت، لأنه من المستبعد جدًّا أن تؤدي الإشارة الشاردة إلى إنتاج مثل هذا النمط المعقَّد. يُعين لكل قمر صناعي الشفرة شبه العشوائية

الشخصية الخاصة به، لذا فإن التعقيد نفسه يضمن أن جهاز الاستقبال لا يخلط بين إشارة من قمر صناعي وإشارة أخرى من قمر صناعي آخر. وكميزة إضافية، يمكن لجميع الأقمار الصناعية الإرسال على التردد نفسه دون التشويش على بعضها، مما يحرر المزيد من الترددات في طيفنا الراديوي المزدحم بشكل متزايد. وفي العمليات العسكرية على وجه الخصوص، لا يمكن للعدو اختراق النظام أو إرسال إشارات كاذبة. وبشكل عام، وزارة الدفاع الأمريكية هي المسئولة عن الشفرة شبه العشوائية، لذا يمكنها التحكم في الوصول إلى نظام تحديد المواقع العالمي.

بالإضافة إلى الانحراف التدريجي للساعات الذرِّية، هناك مصادر أخرى لأخطاء التوقيت أيضًا، مثل اختلاف مدارات الأقمار الصناعية قليلًا في الشكل والحجم عن المدار المقصود. وترحل المحطة الأرضية التصحيحات إلى القمر الصناعي، الذي يمررها إلى المستخدمين، مما يضمن أن كل شيء متزامن مع الساعات المرجعية في المرصد البحري الأمريكي. لكن أخطاء التوقيت النسبية هي أكثر الأخطاء التي تحتاج إلى عمل رياضي. لذا، فبدلًا من الفيزياء النيوتنوية القديمة الطراز، نحتاج إلى نظريتي النسبية الخاصتين بأينشتاين.[2]

في عام ١٩٠٥، نشر أينشتاين ورقة بحثية بعنوان «حول الديناميكا الكهربائية للأجسام المتحركة». ودرس فيها العلاقة بين ميكانيكا نيوتن ومعادلات ماكسويل للكهرومغناطيسية، ووجد أن هاتين النظريتين غير متوافقتين. وتتمثل المشكلة الرئيسية في أن السرعة التي تنتشر بها الموجات الكهرومغناطيسية — سرعة الضوء — ليست فقط ثابتة في إطار مرجعي ثابت، بل لها أيضًا نفس القيمة الثابتة في إطار متحرك. إذا أضأتَ مصباحًا يدويًّا من سيارة متحركة، فإن الفوتونات تنتقل بالسرعة نفسها التي كانت ستنتقل بها عندما كانت السيارة متوقفة.

على النقيض، في الفيزياء النيوتونية، ستُضاف سرعة السيارة إلى سرعة الضوء. لذلك اقترح أينشتاين تعديل قوانين نيوتن للحركة للتأكد من أن سرعة الضوء ثابتٌ مطلق، مما يعني ضمنًا على وجه التحديد أن معادلات الحركة النسبية يجب تعديلها. لهذا السبب سُميت النظرية بالنسبية، وهي تسمية مضلِّلة بعض الشيء؛ لأن النقطة الأساسية هي أن سرعة الضوء «ليست» نسبية. وقد أمضى أينشتاين سنوات عديدة في محاولة دمج الجاذبية في إطار نظريته، ونجح في النهاية في عام ١٩١٥. وأصبحت هاتان النظريتان المترابطتان والمتميزتان في الوقت نفسه معروفتين، على التوالي، بالنسبية الخاصة والنسبية العامة.

إن هذا ليس كتابًا عن النسبية، لذا اسمح لي أن أمُر سريعًا على بعض السمات البارزة، لإعطاء صورة تقريبية جدًّا لما ينطوي عليه الأمر. لا يوجد مجال هنا لتناول الفروق الفلسفية الدقيقة، وحتى لو كان موجودًا، فلن نتطرق إليها، لذا تحمَّلوني إذا بالغت في التبسيط.

في نظرية النسبية الخاصة، تُعدَّل معادلات الحركة للتأكد من أن سرعة الضوء لها القيمة نفسها في أي إطار مرجعي يتحرك بسرعة ثابتة. يتحقق ذلك باستخدام تحويلات لورنتس، وهي صِيَغ رياضية تحمل اسم الفيزيائي الهولندي هندريك لورنتس، وتصف كيف يتغير الموضع والزمن عند مقارنة الإطارات المختلفة. والتنبؤات الرئيسية تكون غريبة جدًّا من وجهة النظر النيوتنية. لا شيء يمكن أن ينتقل على نحو أسرع من الضوء؛ يتقلص طول الجسم مع زيادة سرعته، ويصبح صغيرًا بشدة مع اقتراب السرعة أكثر وأكثر من سرعة الضوء؛ وبينما يحدث هذا، فإن الزمن المدرك يمر ببطء شديد؛ وتزداد الكتلة بلا حدود. ببساطة، عند سرعة الضوء، يتقلَّص طول الجسم (في اتجاه الحركة) إلى الصفر، ويتوقف الزمن، وتصبح الكتلة غير محدودة.

إن نظرية النسبية العامة تحافظ على هذه المكونات، لكنها تضمن الجاذبية أيضًا. ومع ذلك، فبدلًا من أن تكون الجاذبية قوة، كما صاغها نيوتن، أصبحت تأثير انحناء الزمكان، وهو بناء رياضي رباعي الأبعاد يجمع بين أبعاد الفراغ الثلاثة وبُعد رابع، هو الزمن. بالقرب من أي كتلة، مثل نجم، «ينحني» الزمكان، مما يؤدي إلى نوع من الانخفاض، ولكن في أربعة أبعاد. وينحرف شعاع ضوء أو جُسَيم، مار في مكان قريب، عن خط مستقيم؛ لأنه يتبع الانحناء. وهذا يخلق الوهم بوجود قوة جذب بين النجم والجُسيم.

جرى التحقُّق من كلتا النظريتين بإسهاب من خلال تجارب شديدة الحساسية. وعلى الرغم من سماتهما الغريبة إلى حد ما، فإنهما توفران أفضل نموذج للواقع اكتشفته الفيزياء حتى الآن. يجب أن تأخذ المفاهيم الرياضية المستخدمة في نظام تحديد المواقع العالمي التأثيرات النسبية في الاعتبار، من جانب سرعة القمر الصناعي وبئر جاذبية الأرض، وإلا فسيصبح النظام عديم الفائدة. في الواقع، إن نجاح هذا النظام، المصحح على هذا النحو، لهو اختبار مهم لصحة كلٍّ من النسبية الخاصة والعامة.

إن معظم مستخدمي نظام تحديد المواقع العالمي يكونون في مواقع ثابتة على سطح الأرض، أو يتحركون ببطء؛ لا تتعدى السرعة سرعة سيارة سريعة، على سبيل المثال. لهذا السبب، قرر المصممون بث معلومات حول مدارات الأقمار الصناعية باستخدام إطار

مرجعي مرتبط بشدة بالأرض الدوَّارة، وبافتراض أن معدل دورانها ثابت. إن شكل كوكبنا، الذي يطلق عليه «الجيويد»، هو تقريبًا مجسم قطع ناقص دوراني مفلطَح قليلًا.

عندما تكون في سيارتك، والأقمار الصناعية تدور في السماء فوقك، فمن الواضح أنها تتحرك بالنسبة إليك. وتتنبأ نظرية النسبية الخاصة بأنك ستلاحظ أن ساعة القمر الصناعي تتحرك ببطء أكثر من الساعة المرجعية على الأرض. في الواقع، ستتأخر ساعة القمر الصناعي بنحو ٧ ميكروثوانٍ لكل يوم، وذلك بسبب التمدد الزمني النسبي. وبالإضافة إلى ذلك، فإن قوة الجاذبية الظاهرة على ارتفاع مدارات الأقمار الصناعية تكون أقل من تلك الموجودة على الأرض. ووَفقًا لنظرية النسبية العامة، يكون الزمكان بالقرب من الأقمار الصناعية أكثر انبساطًا — أقل انحناءً — مما هو بالقرب من سيارتك. يتسبَّب هذا التأثير في تشغيل ساعات الأقمار الصناعية بشكل أسرع من الساعات الأرضية. وتتنبأ نظرية النسبية العامة بأن ساعات الأقمار الصناعية تسبق الساعات الأرضية بمقدار ٤٥ ميكروثانية لكل يوم. بالجمع بين هذه التأثيرات المتضاربة، فإن ساعة القمر الصناعي ستعمل أسرع من الساعة الأرضية بنحو ٤٥ − ٧ = ٣٨ ميكروثانية لكل يوم. وسيصبح مثل هذا الخطأ ملحوظًا بعد دقيقتين، وسوف ينحرف موقعك بحوالي ١٠ كيلومترات لكل يوم عن الموقع الصحيح. وفي غضون يوم واحد، سيضعك جهاز الملاحة بالأقمار الصناعية في البلدة الخطأ، وفي غضون أسبوع في المقاطعة الخطأ، وفي غضون شهر في الدولة الخطأ.

في البداية، لم يكن المهندسون والعلماء العاملون في مشروع نظام تحديد المواقع العالمي على يقين من أن النسبية مهمة بالفعل لهذا النظام. فسُرعات الأقمار الصناعية سريعة وفقًا للمعايير البشرية، ولكنها أشبه بزحف بطيء مقارنة بسرعة الضوء. وجاذبية الأرض ضئيلة عند مقارنتها بالنِّسَب الكونية. لكنهم بذلوا قصارى جهدهم لتقدير حجم هذه التأثيرات. في عام ١٩٧٧، عندما وُضع أول نموذج أولي لساعة السيزيوم الذرِّية في المدار، لم يكونوا متأكدين من حجم هذه التأثيرات، أو ما إذا كان ينبغي أن تكون إيجابية أم سلبية، والبعض لم يعتقد أن التصحيحات ذات الصلة بالنسبية ستكون ضرورية على الإطلاق. لذا دمج المهندسون في الساعة دائرة إلكترونية، وعند إشارة معينة من الأرض، يمكنها تغيير ترددها لإلغاء التأثيرات النسبية المتوقعة، إذا تبين أن ذلك ضروري. في الأسابيع الثلاثة الأولى، تركوا هذه الدائرة مغلقة، وقاسوا تردد الساعة، ولاحظوا زيادته بمقدار ٤٤٢٫٥ جزء لكل تريليون، مقارنة بساعة على الأرض. كان التوقع من نظرية النسبية العامة زيادةً قدرها ٤٤٦٫٥ جزء لكل تريليون. إنها دقة مذهلة إلى حد كبير.

هناك العديد من الاستخدامات الأخرى لنظام تحديد المواقع العالمي، بخلاف الاستخدام الواضح المتمثل في تحديد المواقع (للسيارات، والمركبات التجارية، والرحالة المتجولين)، والتطبيقات العسكرية، التي أدت إلى إنشاء النظام في المقام الأول. سأذكر هنا القليل فقط منها.

أنت لست بحاجة إلى معرفة مكانك عندما تستخدم تطبيقًا لطلب المساعدة على الطريق عندما تتعطل سيارتك؛ لأن نظام تحديد المواقع العالمي يفعل ذلك نيابةً عنك. كما يُستخدم النظام أيضًا لمنع سرقة السيارات، وللقيام بعمليات وضع الخرائط والمسح، ومراقبة الحيوانات الأليفة والأقارب المسنِّين، والحفاظ على أمان الأعمال الفنية. وتشمل الاستخدامات الرئيسية: الملاحة في السفن والطائرات، وتتبع مركبات شركات النقل. والآن بعد أن أصبحت معظم الهواتف المحمولة مزوَّدة بأجهزة استقبال خاصة بهذا النظام، فيمكنها ربط صورك بالموقع الذي التقطتها فيه، وإخبارك بمكان الهاتف المفقود أو المسروق، واستدعاء سيارة أجرة من أجلك. كما يمكنك استخدام النظام جنبًا إلى جنب مع خدمات الخرائط عبر الإنترنت مثل «جوجل مابس»، بحيث تُظهر لك الخريطة مكانك تلقائيًّا. ويمكن للمزارعين التحكم في الجرارات التي هي بغير سائق، ويمكن للمصرفيين مراقبة التحويلات المالية، ويمكن للمسافرين تتبُّع أمتعتهم. كما يمكن للعلماء مراقبة تحركات الأنواع المهددة بالانقراض وتتبع الكوارث البيئية مثل حالات التسرُّب النفطي.

كيف كان من الممكن أن نُدير شئوننا بفعالية دون نظام تحديد المواقع العالمي؟ إنه لأمر مدهش كيف يمكن لقليل من السحر الرياضي، الذي أتاح ظهور التقنيات التحويلية (والمكلفة للغاية)، أن يغير حياتنا بسرعة؟

الفصل الثاني عشر

إيزينج وذوبان ثلوج القطب الشمالي

> يذوب الغطاء الثلجي في جرينلاند على نحوٍ أسرع بكثير مما كان يُعتقد سابقًا، وهذا يهدد مئات الملايين من الناس بالغرق، ويُعَجل كثيرًا بالتأثيرات التي لا رجعة فيها لحالة الطوارئ المناخية. وأصبحت جرينلاند تفقد الثلج سبع مرات أسرع مما كان عليه الأمر في التسعينيات من القرن الماضي، كما أن حجم وسرعة فقدان الثلج أعلى بكثير مما كان متوقعًا.
>
> صحيفة «ذا جارديان»، ديسمبر ٢٠١٩

لم يكن عمل إيزينج متعلقًا بالثلج. لقد كان متعلقًا بشيء مختلف تمامًا. لكن نموذجه طُبق على ذوبان ثلوج القطب الشمالي.

إن الكوكب آخذ في الاحترار، وهذا أمر خطير، وإنه خطؤنا. نحن نعلم ذلك؛ لأن الآلاف من علماء المناخ الأَكْفَاء، الذين نفذوا مئات النماذج الرياضية، قد توقعوا هذا منذ عدة عقود، وتؤكد الملاحظات التي أجراها خبراء الأرصاد الجوية المتَّسِمون بالقدر نفسه من الكفاءة معظم الاستنتاجات المهمة. يمكنني أن أقضي بقية هذا الكتاب في الحديث حول مُروِّجي الأخبار المزيفة الذين يحاولون إقناعنا بأنه لا يوجد ما يدعو للقلق، وأقارن بين تفاهاتهم والأدلة المتزايدة على حدوث التغيُّر المناخي الذي تسبب فيه الإنسان، مع شرح نقاط التفاصيل الدقيقة الكثيرة التي لا تزال غير مؤكدة، ولكن، كما يقول آرلو جاثري في منتصف أغنية «مطعم أليس»، هذا ليس ما جئت لأخبركم به. فكثير من الناس يفعلون ذلك أفضل مني بكثير، ويحاول كثير من الآخرين جاهدين إيقافهم من أجل الحفاظ على ثروات مجموعة قليلة من الأشخاص فاحشي الثراء.

يُعد تغيُّر المناخ إحصائيًّا بطبيعته، لذا يمكن تفسير أي حادثة معينة على أنها واحدة من تلك الأشياء الغريبة التي تحدث من وقت لآخر. إذا كانت عملة معدنية ما منحازة عند رميها لإعطاء وجه الصورة خلال ثلاثة أرباع الوقت، فإن أي رمية فردية تُعطي صورة أو كتابة، تمامًا مثل أي عملة غير منحازة. لذا رمية واحدة لا يمكن أن تكشف الفرق. وحتى تتابع الرميات، الذي يُظهر الصورة ثلاث مرات أو أربعًا متتالية، يمكن أحيانًا أن يحدث بعملة عادلة. ولكن إذا نتج عن ١٠٠ رمية ظهور الصورة ٨٠ مرة وظهور الكتابة ٢٠ مرة، فمن الواضح أنها ليست عملة عادلة.

المناخ مشابه لهذا. إنه يختلف عن الطقس الذي يتغير من ساعة لأخرى ومن يوم لآخر. المناخ عبارة عن متوسط متحرك لمدة ثلاثين عامًا. والمناخ العالمي يمثل متوسط ذلك على الكوكب بأسره أيضًا. يتطلب الأمر تغييرات هائلة طويلة الأجل على نطاق الكوكب لتغيير المناخ. ومع ذلك، فإن سجلات درجات الحرارة العالمية عالية الجودة تعود إلى ما يقرب من ١٧٠ عامًا، وقد جاء ١٧ من الثمانية عشر عامًا الأكثر سخونة بعد عام ٢٠٠٠. وهذا ليس من قبيل الصدفة.

إن الطبيعة الإحصائية للمناخات تجعل من السهل على المنكرين زيادة تعقيد الأمور. ونظرًا لعدم قدرتهم على تسريع وتيرة كوكب الأرض، كان على علماء المناخ الاعتماد على النماذج الرياضية للتنبؤ بالمستقبل، وتقدير مدى سرعة تغيُّر المناخ، وتحديد الآثار التي قد تُحدثها هذه التغييرات، ودراسة ما يمكن أن تفعله البشرية حيال ذلك إذا اتحدت. كانت النماذج المبكرة بدائية نسبيًّا، مما فتح الباب للاعتراضات من أي شخص لم تُعجبه التنبُّؤات، على الرغم من أنه عند تأمُّل الماضي يتضح أنه حتى هذه النماذج توصلت إلى معدل ارتفاع درجة الحرارة العالمية بدقة عالية، إلى جانب أشياء أخرى كثيرة. وعلى مر السنين جرى تنقيحها، وأصبحت درجات الحرارة المتوقعة الآن تطابق الواقع كثيرًا على مدى نصف القرن الماضي. إن مقدار الثلج الذي سيذوب نتيجة لذلك ليس مؤكدًا، ويبدو أنه قد تم التقليل من شأنه. والآليات ذات الصلة ليست مفهومة جيدًا، كما أن العلماء كانوا يتعرَّضون لضغوط طوال عقود حتى لا يظهروا بمظهر المبالغين في القلق.

حتى الآن، ركزت على تأثير الرياضيات، التي تعمل خلف الكواليس دون أن تحصل على ما تستحقه من التقدير، على حياتنا اليومية. ولم أتناول عمدًا الكثير من تطبيقاتها المهمة في مجال العلوم، لا سيما العلوم النظرية. لكن تغيُّر المناخ يؤثر بالفعل على حياتنا اليومية؛ اسأل الأستراليين الذين اضطروا لمواجهة حرائق الغابات غير المسبوقة في أوائل

عام ٢٠٢٠. انظر إلى موجات الحر القياسية في جميع أنحاء العالم، والفيضانات التي كانت تحدث كل مائة عام وأصبحت تحدث الآن كل خمس سنوات أو عشر. انظر، وهو الأمر الغريب بالقدر الكافي، إلى النوبات العرضية للطقس الشديد البرودة. من غير المنطقي بعض الشيء أن الاحترار العالمي يمكن أن يتسبب في برودة بعض الأماكن أكثر بكثير من المعتاد، لكن التفسير بسيط. فالاحترار العالمي هو عبارة عن متوسط كمية الطاقة الحرارية التي تدخل الغلاف الجوي والمحيطات والأرض. لم يقل أحد إن كل مكان سوف يصبح حارًّا على نحو منتظم.

ومع ارتفاع إجمالي الطاقة الحرارية للكوكب، تزداد التقلبات حول المعدل المتوسط، ويمكن أن تصبح هذه التقلبات أكثر برودة من المعتاد، وكذلك أكثر حرارة. النقطة المهمة هي أن تلك الأكثر سخونة تسود في المجمل. إن نوبة البرد المفاجئة في مكان ما ليست دليلًا على أن الاحترار العالمي أكذوبة. وبالمثل، إذا كانت بلدتك أبرد بعشر درجات عن المعتاد، لكن إحدى عشرة بلدة في مكان آخر أكثر حرارة بدرجة واحدة، فقد ارتفع متوسط درجة الحرارة العالمية. وإذا كانت بلدتك أبرد بعشر درجات عن المعتاد اليوم، ولكن أكثر حرارة بدرجة واحدة لمدة أحد عشر يومًا متفرقة في وقت لاحق، فقد ارتفع متوسط درجة الحرارة العالمية، ولم يتغير أي شيء آخر. في الواقع، لقد ارتفع أيضًا متوسط درجة الحرارة في بلدتك.

تكمن المشكلة في أننا نلاحظ نوبة البرد المفاجئ، لكن التأثيرات التعويضية يمكن أن تكون صغيرة جدًّا بحيث لا تمسُّ وعيَنا، أو مبعثرة جدًّا، أو تحدث في مكان آخر. لقد حدثت نوبات البرد غير المعتادة التي ضربت أوروبا وأمريكا الشمالية في السنوات الأخيرة لأن التيار الدافق دَفَع الهواء البارد من القطب الشمالي جنوبًا أكثر من المعتاد. لذا فإن الهواء البارد الذي كان يدور عادة حول الغطاء الثلجي الشمالي انتهى به المطاف فوق المحيطات، وجرينلاند، وشمال كندا وروسيا. لماذا جاء كل هذا الهواء البارد جنوبًا؟ لأن الهواء في المناطق القطبية كان أكثر سخونة من المعتاد، مما أدى إلى إزاحة الهواء البارد. بشكل عام، أصبحت المنطقة المتأثِّرة بأكملها أكثر دفئًا، في المتوسط.

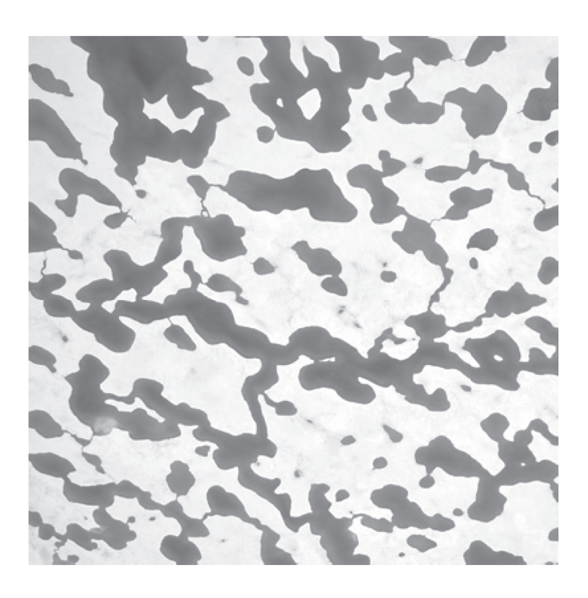
هناك ما يكفي من الجوانب الرياضية في نمذجة المناخ بحيث يمكن تخصيص كتاب بأكمله لها، لكنني لا أريد أن أخبركم عن ذلك. فمثل آرلو، أنا فقط أُجهز المشهد لما أريد أن أخبركم به.

تذوب الثلوج في جميع أنحاء العالم. في عدد قليل من الأماكن غير المعتادة، تزيد كمية الثلوج، ولكنها تتناقص بسرعة في كل الأماكن الأخرى. تتراجع الأنهار الثلجية، ويتقلَّص الغطاءان الثلجيان لكِلا القطبين. وتهدد هذه الآثار إمدادات المياه لمليارين من البشر، وسيؤدي ارتفاع مستوى سطح البحر الناتج عن ذلك إلى إغراق منازل نصف مليار شخص آخر، ما لم نُوقِف حدوث ذلك. لذا أصبحت الجوانب الفيزيائية والرياضية ذات الصلة بذَوَبان الثلوج فجأة ذات أهمية حيوية، على المستوى الشخصي، للجميع تقريبًا.

يعرف العلماء الكثير عن ذوبان الثلج. وإلى جانب غليان الماء وتحوُّله إلى بخار، فهو مثال كلاسيكي على التحول الطَّوري، وهو تغيُّر في حالة المادة. ويمكن أن يوجد الماء في عدد من الحالات المختلفة. يمكن أن يكون صلبًا أو سائلًا أو غازيًّا. وتعتمد الحالة التي يكون عليها بشكل أساسي على درجة الحرارة والضغط. عند الضغط الجوي، يكون الماء البارد بدرجة كافية صلبًا؛ أي ثلجًا. وعندما يسخن، ويتجاوز نقطة الذَّوَبان، يتحول إلى سائل؛ أي ماء. سخنه أكثر قليلًا، إلى نقطة الغليان، وسيتحول إلى غاز: بخار. حاليًّا، هناك ١٨ طَورًا مختلفًا من الثلج معروف للعلم، آخرها، «الثلج المربع»، الذي اكتُشف في عام ٢٠١٤. وثلاثة من هذه الأطوار تنشأ عند الضغط العادي؛ ويتطلَّب الباقي ضغطًا أعلى بكثير.

يأتي معظم ما هو معروف عن الثلج من التجارب المعملية على كميات صغيرة نسبيًّا منه. ما نحتاج إلى معرفته بشكل عاجل حول ذَوَبان الثلج اليوم له صلة بكميات كبيرة للغاية من الثلج في البيئة الطبيعية. هناك طريقتان متشابكتان لمعرفة ذلك: مراقبة وقياس ما يحدث، وبناء نماذج نظرية للمبادئ الفيزيائية الأساسية المتضمَّنة. ومفتاح الفهم الحقيقي يكمن في الجمع بين الاثنين.

من العلامات التي تشير إلى ذوبان الثلج القطبي، وخاصة الثلج البحري، تكوُّن البِرَك الذائبة. يبدأ سطح الثلج بالذوبان، وتعكر البُرَيكات الصغيرة الداكنة البياض النقي للثلج، أو غالبًا اللون شبه الرمادي النقي الناتج عن رواسب الغبار. والبُريكات عبارة عن ماء سائل، وعلى عكس الثلج، فهي داكنة اللون، لذا فهي تمتص ضوء الشمس بدلًا من عكسه. وتعمل الأشعة تحت الحمراء على وجه الخصوص على تدفئة البريكات بشكل أسرع مما لو كانت لا تزال ثلجية، لذلك يزداد حجم البريكات. وعندما تكبر بما يكفي، تندمج لتشكل بريكات أكبر، وهي تكون كبيرة بما يكفي لكي تُعتبر بِرَكًا. تكون هذه بِركًا ذائبة، وهي تصنع أشكالًا معقَّدة ومركبة؛ كُتلًا مرتبطة بخيوط رفيعة، تتفرع وتنتشر مثل بقع أحد الفطريات الغريبة.



تبرز البِرَك الذائبة الداكنة مقابل الثلج الأبيض في القطب الشمالي. لماذا تصنع هذه البرك مثل هذه الأنماط المعقَّدة؟

تُعتبر فيزياء نمو البرك الذائبة إحدى السمات الحيوية لمعرفة كيف يتصرف الثلج البحري عندما يصبح أكثر دفئًا. وهذا بالضبط ما يحدث، خاصة للثلج البحري في القطب الشمالي. ما سيحدث للثلج البحري مع ارتفاع درجة حرارة الكوكب هو جزء حيوي من مشكلة فهم تأثير تغير المناخ. لذلك من الطبيعي أن يستكشف علماء الرياضيات نماذج ذَوَبان الثلج بهدف سَبْر بعض أسراره. وهذا ما يفعلونه. وهو ليس بالأمر المفاجئ. لكن المفاجأة هي أن أحد النماذج التي تُدرس الآن ليس عن ذَوَبان الثلج على الإطلاق. إنه عن المغناطيسية، ويعود تاريخه إلى عام ١٩٢٠. إن المواد المغناطيسية تخضع لأنواعها الخاصة من التحوُّل الطَّوري، وعلى وجه التحديد تفقد مغناطيسيتها الكامنة إذا ارتفعت درجة حرارتها بشدة.

لطالما كان هذا النموذج بالتحديد تجسيدًا بارزًا لعمليات التحول الطَّوري. وقد ابتكره الفيزيائي الألماني فيلهلم لينس، لذلك يسميه الجميع بالطبع نموذج إيزينج؛ لأن علماء الرياضيات والفيزيائيين يسمون الأشياء دائمًا باسم الشخص الأكثر ارتباطًا بها في أذهانهم، الذي غالبًا ما لا يكون المبتكِر الفعلي. كان لدى لينس طالب، اسمه إرنست

إيزينج، وقد حدد له مشكلة بحثية ليحلها من أجل نيل درجة الدكتوراه: حل النموذج وإثبات أنه يحتوي على تحول طَوري مغناطيسي. وقد حله إيزينج، وأثبت أنه لا يحتوي على هذا التحول. ومع ذلك، كان بحثه السبب في ظهور مجال كامل للفيزياء الرياضية، وقد أثرى بشكل كبير فَهمنا للمَغَانط.

وأثرى الآن فهمنا لذَوَبان الثلج.

إن المغانط مألوفة جدًّا في الوقت الحاضر، لدرجة أننا نادرًا ما نتساءل عن كيفية عملها. إننا نستخدمها في لصق أشكال الحيوانات البلاستيكية الصغيرة على باب الثلاجة (حسنًا، نحن في منزلنا نفعل ذلك)، وتثبيت الأغطية على هواتفنا المحمولة، و(باستخدام مغانط كبيرة نوعًا ما) اكتشاف جُسيم بوزون هيجز الشهير، الذي يعطي كتلة للجسيمات دون الذَّرِّية. وتشمل الاستخدامات اليومية محركات الأقراص الصلبة الخاصة بالكمبيوتر والمحركات الكهربائية، مثل ذلك الذي يرفع أو يخفض نافذة سيارتك تلقائيًّا، أو الذي يولد كميات تقدر بالجيجاوات من الطاقة الكهربائية. وعلى الرغم من وجود المغانط في كل مكان، فإنها غامضة للغاية. إنها تتجاذب أو تتنافر من خلال مجال قوة غير مرئي من نوع ما. وأبسط المغانط القضيبية وأكثرها شيوعًا لها قطبان، واحد بالقرب من كل طرف، وهما يُسمَّيان القطب الشمالي والقطب الجنوبي. تنجذب الأقطاب الشمالية والجنوبية بعضها لبعض، لكن الأقطاب المتشابهة سواء الشمالية معًا أو الجنوبية معًا تتنافر. وإذا حاولت دفع قطبين متشابهين لمغناطيسين صغيرين قويَّين بالقرب من بعضهما، فيمكنك أن تشعر بهما وهما يتراجعان للخلف. وإذا حاولت إبعاد قطبين غير متشابهين عن بعضهما، فإنك تشعر أنهما يحاولان الالتصاق معًا. إن لكلٍّ منهما تأثيرًا على الآخر حتى عندما لا يكونان متلامسَين؛ أي، «فعل عن بُعد». وباستخدام المغانط، يمكنك جعل الأشياء ترتفع في الهواء، حتى الأشياء الكبيرة مثل القطارات. الغريب أن مجال القوة هذا غير مرئي. فلا يمكنك رؤية شيء.

عرَف البشر المغانط منذ ٢٥٠٠ عام على الأقل. وهي توجد بشكل طبيعي في معدِن الماجنيتيت، وهو أحد أكاسيد الحديد. ويمكن لكتلة صغيرة من الماجنيتيت، تُعرف باسم حجر المغناطيس، جذب الأجسام الحديدية، ويمكنك تحويلها إلى بوصلة بتعليقها على خيط أو جعلها تطفو فوق الماء على قطعة من الخشب. لقد استُخدم حجر المغناطيس بشكل روتيني في الملاحة منذ القرن الثاني عشر الميلادي تقريبًا. إن موادَّ مثل هذه، حيث

يمكن تزويدها بمجال مغناطيسي دائم، توصف بأنها فرومغناطيسية. إن معظمها عبارة عن سبائك حديد ونيكل وكوبالت أو أي منها. تحافظ بعض المواد على مغناطيسيتها على نحو دائم تقريبًا، بينما يمكن مغنطة البعض الآخر بشكل مؤقت، لكنها سرعان ما تفقد مغناطيسيتها مرة أخرى.

لقد بدأ العلماء في الاهتمام الجاد بالمغانط في عام ١٨٢٠، عندما اكتشف الفيزيائي الدنماركي هانس كريستيان أورستد وجود صلة بين المغناطيسية والكهرباء. على وجه التحديد، يمكن للتيار الكهربائي أن يُنشئ مجالًا مغناطيسيًّا. وقد صنع العالم البريطاني ويليام ستيرجن مغناطيسًا كهربائيًّا في عام ١٨٢٤. إن تاريخ الكهرومغناطيسية طويل للغاية بحيث يصعب وصفه بالتفصيل، لكنَّ تقدُّمًا رئيسيًّا جاء من تجارب مايكل فاراداي. وأدى ذلك إلى قيام جيمس كلارك ماكسويل بصياغة معادلات رياضية للمجالين الكهربائي والمغناطيسي والعلاقة بينهما. وتخبرنا المعادلات، على نحو دقيق، أن الكهرباء المتحركة تُولِّد مغناطيسية، والمغناطيسية المتحركة تُولِّد كهرباء. وتفاعلهما يُنتج موجات كهرومغناطيسية تنتقل بسرعة الضوء. وفي الواقع، الضوء هو موجة من هذا النوع. وكذلك الموجات اللاسلكية وأشعة إكس وموجات الميكروويف.

إحدى السمات المحيرة للمواد الفرومغناطيسية هي كيفية استجابتها عند تسخينها. هناك درجة حرارة حرجة تُسمى درجة حرارة كوري. إذا سخنت مادة فرومغناطيسية لأعلى من درجة حرارة كوري الخاصة به، فإن مجاله المغناطيسي يختفي. ليس هذا فقط: التحوُّل يكون مفاجئًا. ومع اقتراب درجة الحرارة من درجة حرارة كوري، يبدأ المجال المغناطيسي في التضاؤل بشكل كبير، ويقل بشكل أسرع كلما اقتربت من درجة حرارة كوري. يطلق الفيزيائيون على هذا النوع من السلوك تحولًا طوريًّا من الرتبة الثانية. السؤال المهم هنا هو: لماذا يحدث ذلك؟

جاء أحد مفاتيح الحل المهمة مع اكتشاف الإلكترون، وهو جسيم دون ذَرِّي يحمل شحنة كهربائية صغيرة جدًّا. والتيار الكهربائي عبارة عن حشد من الإلكترونات المتحركة. وتحتوي الذَّرَّات على نواة مكونة من البروتونات والنيوترونات، وتحيط بها سحابة من الإلكترونات. يحدد عددُ هذه الإلكترونات وترتيبها الخصائص الكيميائية للذَّرَّة. وللإلكترونات أيضًا خاصية تُسمى الدَّوران، وهي خاصية كَمِّية والإلكترونات لا تدور بالفعل، لكن لتلك الخاصية الكثير من القواسم المشتركة مع الزَّخم الزاوي، وهو اسم رياضي منمَّق لإحدى سمات الأجسام الدوَّارة في الفيزياء الكلاسيكية. يخبرنا ذلك بمدى قوة الدوران والاتجاه الذي يحدث فيه؛ أي المحور الذي يدور حوله الجسم.

اكتشف الفيزيائيون تجريبيًّا أن دوران الإلكترون يمنحه مجالًا مغناطيسيًّا. ووفقًا لطبيعة ميكانيكا الكم الغريبة، فإن دوران الإلكترون، المقيس حول أي محور محدد، يكون دائمًا إما «لأعلى»، وإما «لأسفل». تناظر هاتان الحالتان تقريبًا مغناطيسًا صغيرًا قطبه الشمالي في الأعلى وقطبه الجنوبي في الأسفل أو العكس. وقبل أن نقيس الدوران، يمكن أن يكون أي مزيج من الدوران لأعلى ولأسفل في الوقت نفسه، ويمكن النظر إليه على أنه دوران حول محور مختلف تمامًا، ولكن عندما تلاحظ الدوران حول المحور الذي اخترته، فإنه دائمًا ما يظهر على أنه لأعلى. أو لأسفل. أي أيٌّ منهما. هذا هو الشيء الغريب، وهو مختلف تمامًا عن الدوران في الفيزياء الكلاسيكية.

إن الربط بين دوران إلكترون ومجاله المغناطيسي ساعد كثيرًا في تفسير ليس فقط سبب فقدان المغناطيس لمغناطيسيته إذا ارتفعت درجة حرارته للغاية، ولكن أيضًا كيف يفقدها. فقبل أن تصبح المادة الفرومغناطيسية ممغنطة، فإن دورانات إلكتروناتها تتحاذى على نحو عشوائي، بحيث تميل مجالاتها المغناطيسية الصغيرة إلى أن يُلغي بعضها البعض. وعندما تصبح المادة ممغنطة، إما عن طريق مغناطيس كهربائي أو تقارب مع مغناطيس دائم آخر، تتحاذى دورانات إلكتروناتها. وهي عندئذٍ يقوي بعضها البعض، مما يخلق مجالًا مغناطيسيًّا يمكن اكتشافه على نطاق واسع. وإذا تُرك على هذه الحالة، فإن هذا الترتيب لدورانات الإلكترونات يستمر، ويصبح لدينا مغناطيس دائم.

ولكن إذا سخنَّا المادة، فإن طاقة الحرارة تبدأ في تدافع الإلكترونات، وتعكس اتجاه بعض دوراناتها. وتضعف المجالات المغناطيسية التي تشير في اتجاهات مختلفة بعضها عن البعض، ومن ثَم تنخفض القوة الإجمالية للمجال المغناطيسي. وهذا يفسر فقدان المغناطيسية بطريقة نوعية، لكنه لا يفسر سبب وجود مثل هذا التحول الحاد في الطَّور، أو سبب حدوثه دائمًا عند درجة حرارة معينة.

وهنا يأتي دور لينس. لقد ابتكر نموذجًا رياضيًّا بسيطًا: مصفوفة من الإلكترونات، يؤثر كل منها على جيرانه وَفقًا لدوراناتها النسبية. في النموذج، يقع كل إلكترون في نقطة ثابتة في الفراغ، عادةً عند نقطة في شبكة منتظمة، مثل مربعات رقعة شطرنج كبيرة. ويمكن أن يوجد كل إلكترون في النموذج في إحدى حالتين: +١ (الدوران لأعلى) أو −١ (الدوران لأسفل). في أي لحظة، تُغطَّى الشبكة بنمط من أرقام +١ و−١. وإذا استخدمنا تشبيه رقعة الشطرنج، يكون كل مربع إما أسود (الدوران لأعلى) وإما أبيض (الدوران لأسفل). ويمكن أن يحدث أي نمط من المربعات السوداء والبيضاء، على الأقل مبدئيًّا، لأن

الحالات الكمية تكون عشوائية إلى حد ما، لكن بعض الأنماط يكون احتمال وجودها أكثر من غيرها.

إن طلاب الدكتوراه مفيدون حقًّا في إجراء العمليات الحسابية أو التجارب التي يفضل البروفيسور المشرف عليهم تجنُّبها، لذلك طلب لينس من إيزينج أن يحل النموذج. ما تعنيه كلمة «حل» هنا دقيق. ليس للأمر صلة بديناميكا كيفية عكس الدَّوَرانات أو بالأنماط الفردية. وإنما يعني: احسب التوزيع الاحتمالي لجميع الأنماط الممكنة، وكيف يعتمد هذا التوزيع على درجة الحرارة وأي مجال مغناطيسي خارجي. والتوزيع الاحتمالي هو أداة رياضية — غالبًا صيغة — تخبرنا في هذه الحالة بمدى احتمالية أي نمط محدَّد.

لقد طلب منك البروفيسور المشرف أمرًا ما، وإذا كنت ترغب في الحصول على درجة الدكتوراه، فعليك أن تنفذ أوامره. أو، على الأقل، أن تبذل قصارى جهدك؛ لأن المشرفين أحيانًا يكلفون الطلاب بالتعامل مع مشكلات صعبة للغاية. في نهاية الأمر، إن السبب في مطالبة الطالب بحل المشكلة هو أن المشرف لا يعرف الإجابة، وغالبًا ما لا تكون لديه أي فكرة، بخلاف شعور غامض، عن مدى صعوبة العثور عليها.

ومن ثَم شرع إيزينج بجدية في مهمة إيجاد حل لنموذج لينز.

هناك بعض الحِيَل القياسية التي يعرفها المشرفون على رسائل الدكتوراه ويمكنهم اقتراحها على طلابهم. ويكتشف الطلاب المتميزون حقًّا هذه الأشياء بأنفسهم، جنبًا إلى جنب مع أفكار لم تخطر قط ببال المشرف. إحداها تكون غريبة ولكنها صحيحة بشكل عام: إذا كنت ترغب في العمل مع عدد كبير جدًّا، فسيصبح كل شيء أسهل إذا جعلته غير منتهٍ. على سبيل المثال، إذا كنت تريد فَهم نموذج إيزينج لرقعة شطرنج كبيرة ولكنها منتهية، وهي تمثل قطعة كبيرة من مادة فرومغناطيسية ذات حجم واقعي، فمن الملائم رياضيًّا أكثر العمل مع رقعة شطرنج كبيرة على نحو غير منتهٍ. السبب هو أن ألواح الشطرنج المنتهية لها حواف، وهذه تميل إلى تعقيد العمليات الحسابية؛ لأن المربعات عند الحافة تختلف عن تلك الموجودة في المنتصف. يؤدي هذا إلى تدمير تناسق ترتيب الإلكترونات، ويميل التناسق إلى تسهيل العمليات الحسابية. لكن رقعة الشطرنج غير المنتهية ليست لها حواف.

تتوافق صورة رقعة الشطرنج مع ما يسمِّيه علماء الرياضيات والفيزياء بالشبكة ثنائية الأبعاد. تعني كلمة «شبكة» أن الوحدات الأساسية، مربعات رقعة الشطرنج، مرتبة

بطريقة منتظمة جدًّا؛ هنا في صفوف وأعمدة، كلها في محاذاة تامَّة مع جيرانها. ويمكن أن يكون للشبكات الرياضية أي عدد من الأبعاد، في حين أن تلك المادية عادةً ما يكون لها بعد واحد أو اثنان أو ثلاثة. والمثال الأكثر صلة بالفيزياء هو الشبكة ثلاثية الأبعاد، التي هي عبارة عن مصفوفة غير منتهية من المكعبات المتشابهة، المكدَّسة معًا بدقة مثل الصناديق المتطابقة في أحد المخازن. في هذه الحالة، تملأ الإلكترونات منطقة من الفراغ، مثل الذرات في بلورة ذات تناسق مُكَعَّبي، مثل الملح.

يفضل علماء الرياضيات والفيزياء الرياضية كثيرًا البدء بنموذج أبسط ولكن أقل واقعية: شبكة أحادية البُعد، حيث تُرتَّب مواقع الإلكترونات في خط مستقيم على مسافات منتظمة، مثل الأعداد الصحيحة على طول خط الأعداد. إنه ليس ماديًّا للغاية، ولكن جيد لتطوير الأفكار في أبسط الإعدادات ذات الصلة. ومع زيادة أبعاد الشبكة، تزيد التعقيدات الرياضية. على سبيل المثال، هناك نوع واحد من الشبكات البِلَّورية على خط ما، و١٧ نوعًا في المستوى، و٢٣٠ نوعًا في الفراغ الثلاثي الأبعاد. لذلك أسند لينس لتلميذه مشكلة اكتشاف كيف تتصرف مثل هذه النماذج، وكان لديه الحس السليم لإخباره بالتركيز على الشبكة أحادية البعد. وقد حقق الطالب تقدُّمًا في دراسة جميع هذه النماذج كان كافيًا لكي تُسمى اليوم نماذج إيزينج.

على الرغم من أن نموذج إيزينج عن المغناطيسية، فإن هيكله وطريقة تفكيرنا فيه ينتميان إلى الديناميكا الحرارية. لقد نشأ هذا المجال في الفيزياء الكلاسيكية، حيث كانت ذات صلة بكميات مثل درجة الحرارة والضغط في الغازات. وتقريبًا في عام ١٩٠٥، عندما اقتنع الفيزيائيون أخيرًا بأن الذرات موجودة، وأنها تتحد لتكوين جزيئات، أدركوا أن متغيرات مثل درجة الحرارة والضغط هي متوسطات إحصائية. إنها كميات «ماكروسكوبية» يمكننا قياسها بسهولة، ظهرت بسبب أحداث تقع على مقياس «ميكروسكوبي» أصغر بكثير. وبالمناسبة، فهي لا يمكن رؤيتها باستخدام الميكروسكوب، على الرغم من وجود ميكروسكوبات حاليًّا يمكنها تصوير الذَّرَّات الفردية. وتعمل هذه فقط عندما لا تتحرك الذَّرَّة. في أي غاز، يتطاير عدد هائل من الجُزَيئات، وأحيانًا تتصادم وترتد عن بعضها. وتجعلها الارتدادات تتحرك على نحو عشوائي.

إن الحرارة هي شكل من أشكال الطاقة، تسببها حركة الجزيئات: كلما زادت سرعة تحركها، زادت سخونة الغاز، وارتفعت درجة الحرارة، التي تختلف عن الحرارة؛ فهي مقياس لنوعية الحرارة، وليس كميتها. وتوجد علاقات رياضية بين مواضع وسرعات

الجزيئات والمتوسطات الديناميكية الحرارية. هذه العلاقة هي موضوع مجال يُسمَّى الميكانيكا الإحصائية، وهي تسعى إلى حساب المتغيرات الماكروسكوبية بِناءً على المتغيرات الميكروسكوبية، مع التركيز بشكل خاص على تحوُّلات الطَّور. على سبيل المثال، ماذا عن سلوك جزيئات الماء الذي يتغير عندما يذوب الثَّلج؟ وما علاقة درجة حرارة المادة به؟

كانت مشكلة إيزينج مشابهة، ولكن بدلًا من تحوُّل جُزيئات الماء والثلج إلى ماء مع ارتفاع درجة الحرارة، كان يحلل دَوَرانات الإلكترونات والمغانط التي تفقد مغناطيسيتها عندما تصبح أكثر سخونة. كان لينس قد أسس نموذجه — الذي نسميه الآن نموذج إيزينج — بحيث يكون بسيطًا قدر الإمكان. وكما هو معروف في الرياضيات، قد يكون النموذج بسيطًا، لكن حله ليس كذلك.

لنتذكر أن «حل» نموذج إيزينج يعني حساب كيف تتغير السمات الإحصائية لمجموعة مغانط صغيرة مع درجة الحرارة. ويتلخص هذا في إيجاد الطاقة الإجمالية للنظام، وهذا يعتمد على نمط المغناطيسية؛ عدد وترتيب الدورانات لأعلى ولأسفل؛ المربعات السوداء والبيضاء في رقعة الشطرنج. وتُفضِّل الأنظمة الفيزيائية اتخاذ الحالات التي لها أقل طاقة ممكنة. لهذا السبب، على سبيل المثال، سقطت تفاحة نيوتن الأسطورية؛ فقد تقلَّصت طاقة وضع الجاذبية الخاصة بها بينما كانت تسقط نحو الأرض. لقد تمثلت عبقرية نيوتن في إدراك أن المنطق نفسه ينطبق على القمر، الذي يتساقط بشكل دائم، لكنه لا يصطدم بالأرض لأنه يتحرك أيضًا بشكل جانبي. وبإجراء العمليات الحسابية الصحيحة، أظهر أن قوة الجاذبية نفسها تفسر كلتا الحركتين من الناحية الكمية.

على أي حال، كل المغانط الصغيرة — الإلكترونات مع اتجاهات دورانها — تحاول أن تجعل طاقتها الكلية صغيرة قدر الإمكان. لكن كيفية فعلها لذلك، والحالة التي تتخذها، تعتمدان على درجة حرارة المادة. على المستوى الميكروسكوبي، الحرارة هي شكل من أشكال الطاقة التي تجعل الجُزَيئات والإلكترونات تتدافع بشكل عشوائي. كلما زادت سخونة المادة، زاد تدافعها. في المغناطيس، يتغير النمط الدقيق للدورانات باستمرار بسبب التدافع العشوائي، ولهذا السبب يؤدي «حل» النموذج إلى توزيع احتمالي إحصائي، وليس نمطًا محددًا من الدورانات. ومع ذلك، فإن الأنماط الأكثر احتمالًا تبدو جميعًا متشابهة إلى حدٍّ ما، لذلك يمكننا أن نسأل: كيف يبدو النمط النموذجي عند أي درجة حرارة محددة؟

إن الجزء المهم من نموذج إيزينج هو قاعدة رياضية لكيفية تفاعل الإلكترونات، التي تحدد طاقة أي نمط. ويقوم النموذج بافتراض مبسط مفاده أن الإلكترونات تتفاعل فقط

مع جيرانها المباشرين. في أي تفاعل فرومغناطيسي، يكون إسهام الطاقة هذا سالبًا عندما يكون للإلكترونات المتجاورة الدوران نفسه. أما في الأنظمة الفرومغناطيسية المضادة يكون موجبًا عندما يكون للإلكترونات المتجاورة الدوران نفسه. هناك أيضًا إسهام آخر في الطاقة ناتج عن تفاعل كل إلكترون مع مجال مغناطيسي خارجي. في النماذج المبسطة، يكون لكل قُوى التفاعل بين الإلكترونات المتجاورة الحجم نفسه، ولا يوجد مجال مغناطيسي خارجي.

إن المدخل للجوانب الرياضية هو فهم كيف تتغير طاقة نمط معين عندما يتغير لون مربع واحد من الأسود إلى الأبيض، أو العكس. أي يتحول إلكترون واحد، في موقع عشوائي، من +١ (أسود) إلى −١ (أبيض) أو العكس. بعض هذه التحولات يزيد من إجمالي الطاقة، والبعض الآخر يقللها. تزداد احتمالية حدوث التحولات التي تقلل الطاقة الكلية؛ ومع ذلك، فإن تلك التي تزيدها لا تُستبعَد تمامًا، بسبب التدافع الحراري العشوائي. وعلى نحوٍ بديهي، نحن نتوقع أن يستقر نمط الدورانات في حالة تكون لها أقل طاقة. في مادة فرومغناطيسية، ينبغي أن يتسبب هذا في أن يكون لجميع الإلكترونات الدوران نفسه، ولكن من الناحية العملية هذا ليس ما يحدث تمامًا؛ لأنه سيستغرق وقتًا طويلًا جدًّا. بدلًا من ذلك، في درجات الحرارة المتوسطة، توجد رُقَع مميزة؛ حيث تكون الدورانات محاذية بشكل شبه مثالي، مما يخلق نمطًا غير منتظم من الأبيض والأسود. في درجات الحرارة المرتفعة، يتفوق التدافع العشوائي على التفاعلات بين الدورانات المتجاورة، وتصبح الرُّقَع صغيرة جدًّا بحيث لا توجد علاقة بين دوران الإلكترون ودورانات جيرانه، ومن ثَم فإن النمط يكون فوضويًّا ويبدو رماديًّا باستثناء تفاصيل بالأبيض والأسود قليلة للغاية. في درجات الحرارة المنخفضة تكبر الرُّقع، مما يؤدي إلى نمط أكثر تنظيمًا. هذه الأنماط لا تستقر أبدًا على نحو تام؛ فهناك دائمًا تغيرات عشوائية. ولكن، بالنسبة لدرجة حرارة معينة، تستقر السمات «الإحصائية» للنمط.

إن أكثر ما يثير اهتمام الفيزيائيين هو التحول من رُقَع لون منفصلة، حالة منظمة، إلى فوضى رمادية عشوائية. هذا تحوُّل طَوري. وتُظهر التجارب التي أُجرِيت على التحول الطَّوري الفرومغناطيسي، من المغنطة إلى إزالة المغنطة، أنه تحت درجة حرارة كوري يكون النمط المغناطيسي به رقع. وتختلف أحجام الرقع بعضها عن البعض، لكنها تتجمع حول حجم نموذجي معين، أو «مقياس طول»، وهو يصبح أصغر مع زيادة درجة الحرارة. وفوق درجة حرارة كوري، لا توجد أي رقع: يحدث خلط بين قيمتي الدوران.

ما يحدث عند درجة حرارة كوري هو ما يثير اهتمام الفيزيائيين. توجد هنا رُقَع بأحجام مختلفة، ولكن لا يوجد مقياس طول سائد. تشكل الرقع فراكتالًا، وهو نمط بهيكلٍ مفصل على جميع المقاييس. والصورة المقربة لجزء من النمط لها نفس السمات الإحصائية مثل النمط بأكمله، لذلك لا يمكن استنتاج حجم الرقعة من النمط. إذن لم يعد هناك مقياس طول محدد جيدًا. ومع ذلك، يمكن إعطاء المعدل الذي يتغير به النمط أثناء التحول قيمة عددية، تُسمى الأُس الحرِج. ويمكن للتجارب قياس الأُس الحرج بدقة شديدة، لذا فهو يوفر اختبارًا حساسًا للنماذج النظرية. والهدف الرئيسي للمنظرين هو استنباط النماذج التي تعطي الأُس الحرج الصحيح.

لا تستطيع عمليات المحاكاة باستخدام الكمبيوتر «حل» نموذج إيزينج على نحو دقيق؛ فلا يمكنها تقديم صيغة للسمات الإحصائية مع إثبات رياضي دقيق على صحتها. قد تساعد أنظمة الجبر الحديثة المعتمِدة على الكمبيوتر الباحثين على تخمين الصيغة، إن وُجِدت، لكنها ستظل بحاجة إلى إثبات. يمكن أن توفر المزيد من عمليات المحاكاة التقليدية باستخدام الكمبيوتر أدلَّة قوية مع أو ضد مطابقة النموذج للواقع. إن الغاية المنشودة لعلماء الفيزياء الرياضية (وعلماء الرياضيات ذوي الميول الفزيائية، نظرًا لأن المشكلة الرئيسية رياضية بحتة، على الرغم من أنها مدفوعة بالفيزياء) هي الحصول على نتائج «دقيقة» حول الخصائص الإحصائية لأنماط الدورانات في نموذج إيزينج، خاصةً كيف تتغير هذه الخصائص بينما تمر درجة الحرارة عبر نقطة كوري. على وجه الخصوص، يسعى الباحثون إلى إثبات أن التحوُّل الطَّوري يحدث في النموذج، ويهدفون إلى توصيفه من خلال الأُس الحرج والسمات الفراكتالية للأنماط الأكثر احتمالية عند نقطة التحوُّل.

الآن تصبح القصة تقنيَّة أكثر، لكنني سأحاول عرض الأفكار الرئيسية دون الخوض في التفاصيل. تابع ما سأعرضه ولا تقلق بشأن التفاصيل الدقيقة.

إن أهم أداة رياضية في الديناميكا الحرارية هي «دالَّة التقسيم». وإنها يُحصَل عليها عن طريق تجميع لحالات النظام كلها، تعبير رياضي معين يعتمد على الحالة ودرجة الحرارة. ولكي أكون دقيقًا، نحصل على هذا التعبير لأي حالة معيَّنة عن طريق أخذ طاقة تلك الحالة، وجعلها سالبة، وقسمتها على درجة الحرارة. وبعد ذلك، نأخذ الدالة الأُسِّية لهذا، ونجمع كل هذه التعبيرات معًا، لجميع الحالات الممكنة.[1] والفكرة الفيزيائية هنا هي أن الحالات ذات الطاقات الأقل تساهم بشكل أكبر في هذا الناتج، لذا فإن دالة التقسيم يسيطر عليها — أي، تكون في أعلى قيمة لها عند — أكثر نوع حالة محتمل.

يمكن استنتاج جميع المتغيرات الديناميكية الحرارية المعتادة من دالة التقسيم عن طريق العمليات المناسبة؛ لذا فإن أفضل طريقة لـ «حل» النموذج الديناميكي الحراري هي حساب دالَّة التقسيم. وجد إيزينج حله من خلال اشتقاق صيغة للطاقة الحرة،[2] واستنباط صيغة للمغنطة.[3] تبدو الصيغة مثيرة للإعجاب، لكن لا بد أنها أصابت إيزينج بخيبة أمل كبيرة، لأنه بعد كل تلك الحسابات البارعة، فإنها توضح أنه في حالة عدم وجود مجال مغناطيسي خارجي، فإن المادة لا يكون لها مجال مغناطيسي خاص بها. والأسوأ من ذلك أن هذا ينطبق على أي درجة حرارة، أيًّا كانت. لذلك لا يتوقع النموذج حدوث أي تحول طَوري، ولا مغنطة تلقائية لما يُفترض أنها مادة فرومغناطيسية.

سرعان ما اشتُبه في أن السبب الرئيسي لهذه النتيجة السلبية هو بساطة النموذج. في الواقع، أشار إصبع الشك إلى أبعاد الشبكة. في الأساس، إن وجود بُعدٍ واحد قليل جدًّا بحيث لا يؤدي إلى نتائج واقعية. من الواضح أن الخطوة التالية كانت إجراء عمليات الجمع مرة أخرى لشبكة ثنائية الأبعاد، لكن هذا كان صعبًا بالفعل. فأساليب إيزينج كانت غير كافية. وفقط في عام ١٩٤٤، بعد العديد من التطورات التي جعلت مثل هذه الحسابات أكثر منهجية وبساطة، تمكن لارس أونساجر من حل مشكلة إيزينج مع شبكة ثنائية الأبعاد. كان هذا إنجازًا رياضيًّا بارعًا، وفر إجابة معقدة ولكن واضحة. حتى عندئذٍ، كان عليه أن يفترض عدم وجود مجال مغناطيسي خارجي.

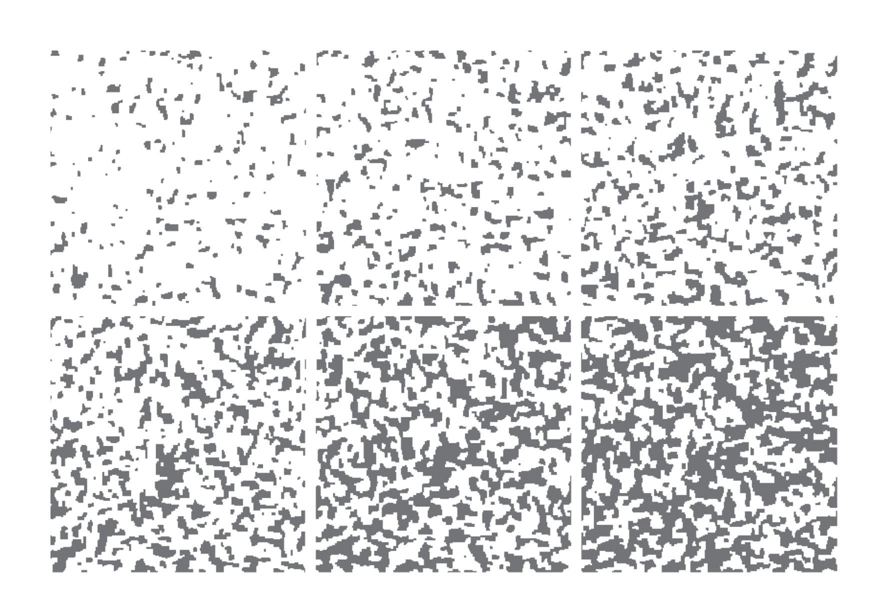
توضح الصيغة الآن أنه يوجد تحول طَوري، يؤدي إلى مجال مغناطيسي داخلي غير صِفري أقل من درجة حرارة حرجة تبلغ $2k_B^{-1}J/\log(1+\sqrt{2})$، حيث k_B هو ثابت بولتسمان من الديناميكا الحرارية وJ هو قوة التفاعلات بين الدورانات. بالنسبة لدرجات الحرارة القريبة من النقطة الحرجة، تمتد الحرارة النوعية إلى ما لا نهاية، مثل لوغاريتم الفرق بين درجة الحرارة الفعلية ودرجة الحرارة الحقيقية، وهي سمة من سمات التحولات الطَّورية. وقد جرى التوصل إلى العديد من الأُسس الحرجة أيضًا من خلال أبحاث لاحقة.

ما علاقة كل هذا الهراء المتعلق بدورانات الإلكترونات والمغانط بالبِرَك الذائبة في الثلج البحري في القطب الشمالي؟ إن ذوبان الثلج هو تحول طوري، لكن الثلج ليس مغناطيسيًا والذَّوبان ليس متعلقًا بعكس اتجاه الدورانات. كيف يمكن أن تكون هناك صلة مفيدة؟

إذا كانت المفاهيم الرياضية مرتبطة بالتفسير الفيزيائي المحدد الذي أدى إلى ظهورها، فستكون الإجابة هي «لا يمكن أن تكون هناك صلة». ومع ذلك، الأمر ليس

هكذا. إنه ليس دائمًا بالتأكيد. هذا هو بالضبط الموضع الذي يظهر فيه غموض الفعالية اللامعقولة للرياضيات، وهو أيضًا السبب وراء نسيان الناس، الذين يجادلون بأن الإلهام من الطبيعة يفسر «الفعالية»، ذكر الجانب اللامعقول.

غالبًا ما يكون المؤشِّر الأوَّلي على إمكانية حدوث هذا النوع من قابلية الانتقال، حيث تنتقل فكرة رياضية من مجال تطبيقي ما إلى آخر يبدو غير ذي صلة به، هو وجود تشابه غير متوقَّع في صيغة أو رسم بياني أو عدد أو صورة. عادةً ما يتبين أن هذا النوع من التشابه ليس أكثر من تورية بصرية، أو صدفة، لا تدل على شيء. ففي نهاية الأمر، هناك فقط عدد محدود من الرسوم البيانية أو الأشكال التي يمكن التعامل معها.



محاكاة لتطور البِرَك الذائبة بِناءً على نموذج إيزينج.

ولكن في بعض الأحيان، يكون هذا في واقع الأمر مؤشرًا على وجود علاقة عميقة.

وهذه هي الطريقة التي بدأ بها البحث الذي سأعرض له في بقية هذا الفصل. منذ نحو عشر سنوات، كان عالم رياضيات يُدعى كينيث جولدن ينظر في صور الثلج البحري في القطب الشمالي، ولاحظ أنها تحمل تشابهًا غريبًا مع صور رُقَع دورانات الإلكترونات

بالقرب من التحول الطَّوري عند نقطة كوري. فتساءل عما إذا كان يمكن إعادة توظيف نموذج إيزينج لإلقاء الضوء على كيفية تشكُّل البِرَك الذائبة وامتدادها. يُطبق النموذج مع الثلج على نطاق أكبر بكثير، مع استبدال حالة التجمُّد/الذَّوَبان لمنطقة من سطح الثلج البحري تبلغ مساحتها مترًا واحدًا مربعًا بحالة الدوران لأعلى/لأسفل لإلكترون صغير.

استغرق الأمر بعض الوقت حتى تتحول هذه الفكرة إلى أفكار رياضية جدِّيَّة، ولكن عندما تحولت، قادت جولدن، بالاشتراك مع عالم الغلاف الجوي كورت سترونج، إلى نموذج جديد لتأثيرات تغير المناخ على الثلج البحري. وقد عرض بعض عمليات محاكاة لنموذج إيزينج على زميل متخصص في تحليل صور البِرَك الذائبة، واعتقد الزميل أنها صور لبِرَك حقيقية. أظهر التحليل الدقيق للسمات الإحصائية للصور — مثل العلاقة بين مساحات البِرَك ومحيطها، التي تقيس مدى عدم انتظام الحدود — أن الأرقام تتطابق بشكل وثيق للغاية.

تعتبر هندسة البرك الذائبة أمرًا حيويًّا في أبحاث المناخ؛ لأنها تؤثر على العمليات المهمة التي تتم على الثلج البحري والطبقات العليا من المحيط. ويتضمن ذلك: كيف يتغير بياض الثلج — مقدار الضوء والحرارة المشعة التي يعكسها — مع ذوبانه، وكيف تتفكك الكتل الجليدية الطافية، وكيف تتغير أحجامها. وهذا بدوره يؤثر على نمط الضوء والظلام تحت الثلج، مما يؤثر على التمثيل الضوئي في الطحالب وإيكولوجيا الميكروبات.

يجب أن يتَّفق أي نموذج مقبول مع مجموعتين رئيسيتين من الملاحظات. في عام ١٩٩٨، قاست بعثة «ميزانية الحرارة السطحية للمحيط المتجمِّد الشمالي» (SHEBA) أحجام البرك الذائبة من خلال التقاط صور لها من طائرات الهليكوبتر. والتوزيع الاحتمالي الملاحظ لأحجام البرك هو قانون أس: احتمالية العثور على بركة بمساحة A تتناسب تقريبًا مع A^k، حيث الثابت k يساوي حوالي −١,٥ بالنسبة للبِرَك التي تتراوح مساحتها بين ١٠ و١٠٠ متر مربع. غالبًا ما يشير هذا النوع من التوزيع إلى هندسة الفراكتالات. تكشف البيانات نفسها، جنبًا إلى جنب مع الملاحظات التي أجرتها «بعثة هيلي–أودن لاستكشاف القطب الشمالي» (HOTRAX) في عام ٢٠٠٥، عن تحول طَوري في هندسة الفراكتالات للبِرَك الذائبة أثناء نموها واندماجها؛ إذ تتطور من أشكال بسيطة إلى مناطق متشابهة ذاتيًّا تتصرف حدودها مثل منحنيات ملء الفراغ. يتغير البُعد الفراكتالي لمنحنيات الحدود — العلاقة بين المساحة والمحيط — من ١ إلى حوالي ٢ في مساحة بركة حرجة تبلغ نحو ١٠٠ متر مربع. يؤثر هذا على كيفية تغير عرض وعمق البرك، مما يؤثر

بدوره على حجم سطح تلاقي الثلج والماء الذي تتوسع عَبرَه البِرَك، والأهم، مدى سرعة ذوبانها.

إن القيمة الملاحظة للأس k هي –١٫٥٨ ± ٠٫٠٣، في توافق جيد مع قيمة بعثة «ميزانية الحرارة السطحية للمحيط المتجمِّد الشمالي» البالغة –١٫٥. ويمكن حساب التغيُّر في البُعد الفراكتالي الملاحظ بواسطة «بعثة هيلي–أودن لاستكشاف القطب الشمالي» نظريًّا باستخدام نموذج تخلُّل، ويتضح أن البُعد الأكبر البالغ ٢ تقريبًا يكون ٩١ / ٤٨ = ١٫٨٩٦ لهذا النموذج. وتؤدي المحاكاة العددية لنموذج إيزينج إلى بُعد فراكتالي قريب جدًّا من هذا.

إن إحدى الميزات المثيرة للاهتمام لهذا البحث هي أن النموذج يعمل على مقاييس طول دقيقة جدًّا تصل إلى بضعة أمتار. معظم النماذج المناخية لها مقياس طول يصل إلى عدة كيلومترات. لذا فإن هذا النوع من النَّمْذَجة هو انطلاقة جديدة على نحو جوهري. لكنه لا يزال في مهده، ويحتاج النموذج إلى التطوير بحيث يصبح نموذجًا يتضمَّن المزيد من فيزياء ذوبان الثلج، وامتصاص أشعة الشمس وإشعاعها، وحتى الرياح. لكنه يقترح بالفعل طُرقًا جديدة لمقارنة الملاحظات بالنماذج الرياضية، ويبدأ في تفسير سبب تشكيل البرك الذائبة لمثل هذه الأشكال الفراكتالية المعقَّدة. وهو أيضًا أول نموذج رياضي للفيزياء الأساسية للبِرَك الذائبة.

رسم تقرير صحيفة «ذا جارديان» المقتبَس جزء منه في بداية هذا الفصل صورة قاتمة للأمور. فالتسارع الحالي لفقدان الثلج في القطب الشمالي، المستنتج من الملاحظات، وليس النماذج الرياضية، يشير ضِمنيًّا إلى أن مستوى سطح البحر بحلول عام ٢١٠٠ سيرتفع بمقدار ثُلثي متر، أي، حوالي قَدَمين. وهذا التقدير يزيد بمقدار سبعة سنتيمترات (ثلاث بوصات) عما توقعته الهيئة الدولية المعنية بتغيُّر المناخ سابقًا. وسيتعرض نحو ٤٠٠ مليون شخص لخطر الفيضانات كل عام؛ أي ١٠٪ أعلى من عدد ٣٦٠ مليونًا الذي توقعته سابقًا الهيئة سالفة الذكر. كما سيؤدي ارتفاع مستوى سطح البحر إلى زيادة حدة المد العاصفي، مما يتسبَّب في مزيد من الضرر للمناطق الساحلية. في التسعينيات من القرن العشرين، كانت جرينلاند تفقد ٣٣ مليار طن من الثلج كل عام. وعلى مدى السنوات العشر الماضية، ارتفع هذا إلى ٢٥٤ مليار طن سنويًّا، وفُقِد ما مجموعه ٣٫٨ تريليون طن من الثلج منذ عام ١٩٩٢. ونحو نصف هذا الفقدان ناتج عن تحرك الأنهار الجليدية بشكل أسرع وتفتتها عندما تصل إلى المحيط. والنصف الآخر ناتج عن الذوبان،

المدفوع أساسًا من السطح. لذا أصبحت الآن فيزياء البرك الذائبة ذات أهمية حيوية للجميع.

إذا كان من الممكن جعل استعارة إيزينج أكثر دقة، فإن كل الأفكار الجيدة حول نموذج إيزينج التي جرى التوصل إليها من خلال الجهود المضنية لأجيال من علماء الفيزياء الرياضية، يمكن تطبيقها على البرك الذائبة. على وجه الخصوص، تفتح الصلة بهندسة الفراكتالات رؤًى جديدة حول الهندسة المعقَّدة للبِرَك الذائبة. وقبل كل شيء، تُعَد قصة العالم إيزينج مع ظاهرة ذوبان الثلج في القطب الشمالي مثالًا رائعًا على الفعالية اللامعقولة للرياضيات. فمن كان يمكن أن يتنبأ، قبل قرن من الزمان، بأن نموذج لينس للتحول الطَّوري للمادة الفرومغناطيسية يمكن أن تكون له أي علاقة بتغيُّر المناخ والاختفاء المستمر للغطاءين الثلجيين القطبيين؟

الفصل الثالث عشر

اتصل بعالم الطوبولوجيا!

> إن السمات الطوبولوجية قوية. وعدد المكونات أو الثقوب ليس شيئًا ينبغي أن يتغير بخطأ بسيط في القياس. وهذا أمر حيوي للتطبيقات.
>
> روبرت جريست، كتاب «مقدمة إلى الطوبولوجيا التطبيقية»

كانت الطوبولوجيا، وهي نوع مرن من الهندسة، في الأصل جزءًا مجردًا للغاية من الرياضيات البحتة. ومعظم الناس، من بين أولئك الذين سمعوا عنها من الأساس، ما زالوا يعتقدون أنها كذلك، لكن هذا بدأ يتغير. ويبدو من غير المحتمل للغاية وجود أي شيء يُسمَّى «الطوبولوجيا التطبيقية». سيكون الأمر أشبه بتعليم خنزيرٍ الغناءَ؛ ما سيصبح أمرًا استثنائيًّا ليس أن الحيوان يُغني جيدًا، ولكن أن يُغني من الأساس. هذا التقييم صحيح في حالة الخنازير، لكنه خاطئ في حالة الطوبولوجيا. في القرن الحادي والعشرين، تتقدم الطوبولوجيا التطبيقية للأمام بخُطًى، حثيثة وتقدِّم حلولًا لمشكلات مهمة في العالم الحقيقي. لقد كانت تسير على هذا النحو لبعض الوقت، دون أن يلاحظها أحد، وقد وصلت الآن إلى النقطة التي يمكن عندها بأمان اعتبارها فرعًا جديدًا من الرياضيات التطبيقية. وهي ليست مجرد تطبيقات قليلة لأجزاء عشوائية من الطوبولوجيا؛ إن التطبيقات واسعة النطاق والأدوات الطوبولوجية المعنية تغطي أجزاءً كبيرة من المجال، بما في ذلك أكثرها تعقيدًا وتجريدًا. المضفرات. ومعقَّدات فيتوريس-ريبس. والحقول المتجهة. والتماثل. والكوهومولوجيا. والهوموتوبيا. ونظرية مورس. ومؤشر ليفشتس. والباقات. والحِزَم. والفئات. والحدود.

هناك سبب لذلك: الوحدة. لقد نمت الطوبولوجيا في حد ذاتها، خلال ما يزيد قليلًا عن قرن من الزمان، من مجموعة من الأمور الغريبة البسيطة إلى مجال متكامل تمامًا من

البحث والمعرفة. إنها الآن إحدى الركائز الرئيسية التي تقوم عليها الرياضيات بأكملها. وحيث تتقدم الرياضيات البحتة، تتبعها الرياضيات التطبيقية عادةً. في نهاية المطاف. (ويحدث العكس أيضًا).

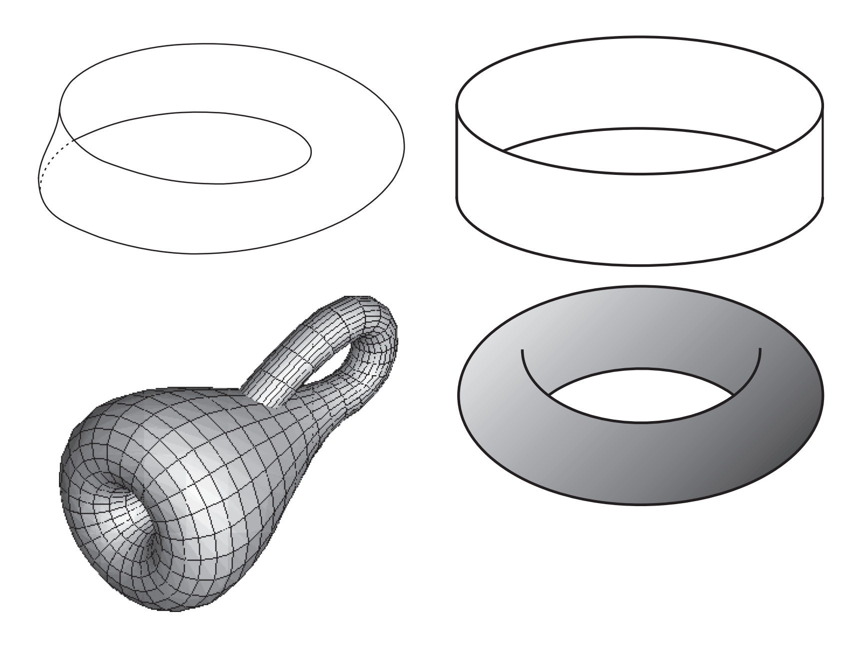
تدرس الطوبولوجيا كيفية تشوُّه الأشكال في ظل التحولات المستمرَّة، وعلى وجه الخصوص، أي السمات تستمر. من الأمثلة المألوفة للتراكيب الطوبولوجية شريط موبيوس، وهو سطح له جانب واحد فقط وعُقَد. ولمدة ثمانين عامًا تقريبًا، درس علماء الرياضيات الطوبولوجيا لفائدتها الجوهرية، دون أن يفكروا في أي تطبيقات لها. وأصبح الموضوع مجردًا بشكل متزايدٍ، وابتُكرت البِنَى الجبرية المعقَّدة المعروفة باسم التماثل (أو الهومولوجيا) والكوهومولوجيا للقيام بأشياء مثل حساب عدد الثقوب في شكل طوبولوجي. بدا كل شيء غامضًا للغاية، ولم تكن له أي آثار عملية.

واصل علماء الرياضيات العمل على الطوبولوجيا بشجاعة، بسبب دورها المركزي في التفكير الرياضي المتقدم. وعندما أصبحت أجهزة الكمبيوتر أكثر قوة، بدأ علماء الرياضيات في البحث عن طُرق لتنفيذ المفاهيم الطوبولوجية إلكترونيًّا، مما يسمح لهم باستكشاف الأشكال المعقَّدة للغاية. لكن كان عليهم تعديل نهجهم لتمكين أجهزة الكمبيوتر من التعامل مع العمليات الحسابية. وكانت النتيجة هي «التماثل المستمر»، وهي طريقة رقمية لاكتشاف الثقوب.

للوهلة الأولى، يبدو اكتشاف الثقوب بعيدًا جدًّا عن العالم الحقيقي. لكن تبين أن الطوبولوجيا مثالية لحل بعض المشكلات المتعلقة بشبكات المستشعرات الأمنية. تخيَّل مرفقًا حكوميًّا شديد الحساسية، محاطًا بغابة، يجذب انتباه الإرهابيين أو اللصوص. ولاكتشاف اقترابهم، نضع مستشعرات حركة في الغابة. لكن ما الطريقة الأكثر فعالية للقيام بذلك، وكيف يمكنك التأكد من عدم وجود فجوات في التغطية، يمكن للأشرار المرور من خلالها دون أن يلاحظهم أحد؟

فجوات أو ثقوب؟ بالطبع! اتَّصِل بعالم الطوبولوجيا.

عندما تتعرض للطوبولوجيا لأول مرة، عادة ما يتم إخبارك ببعض الأشكال الأساسية. وهي تبدو بسيطة للغاية، لُعَب صغيرة غريبة. بعضها طريف، والبعض الآخر غريب تمامًا. لكنها طرافة ذات قصد. وكما قال عالم الرياضيات الكبير هيلبرت ذات مرة: «يتمثَّل فن ممارسة الرياضيات في إيجاد تلك الحالة الخاصة التي تحتوي على جميع بذور العمومية.» اختر اللعبة المناسبة، وستنفتح أمامك مجالات جديدة تمامًا.



أعلى اليمين: أسطوانة. أعلى اليسار: شريط موبيوس. أسفل اليمين: طارة. أسفل اليسار: قنينة كلاين.

يمكن صنع أول لُعبتين في الصورة بإحضار شريط من الورق وربط طرفيهما معًا. الطريقة الواضحة للقيام بذلك تعطي شريطًا أُسطُوانيًّا. هناك طريقة أقل وضوحًا وهي تدوير أحد الطرفين بمقدار ١٨٠ درجة قبل ضمهما. هذا هو شريط موبيوس، على اسم أوجست موبيوس الذي اكتشفه في عام ١٨٥٨، على الرغم من أنه سبق أن لاحظه يوهان ليستينج، وهو أحد طلاب جاوس. كان ليستينج هو من نشر لأول مرة مصطلح «الطوبولوجيا» في عام ١٨٤٧، لكن جاوس كان هو من وجَّهه، على نحو يدل على بُعد نظره، نحو هذا المجال الناشئ في المقام الأول.

للأُسطوانة حافتان منفصلتان، كل منهما على شكل دائرة، ولها جانبان متميزان. يمكنك تلوين الجزء الداخلي باللون الأحمر والخارجي بالأزرق، ولن يلتقي اللونان أبدًا. في الطوبولوجيا، ما يهم هو خصائص الأشكال التي تستمر إذا شوهت الشكل باستمرار. يمكننا مد أجزاء منه، وضغطها، وتدويرها، ولكن لا يمكننا قطعها أو تمزيقها، إلا إذا

قمنا بضم كل شيء معًا مرة أخرى لاحقًا. لا يعد العرض المنتظم للشريط الأسطواني في الصورة خاصية طوبولوجية؛ يمكنك تغيير العرض من خلال التشويه المستمر. لا تعتبر استدارة الحواف خاصية طوبولوجية لأسباب مماثلة. لكن كون الشيء حافة، وامتلاك حافتين متميزتين، وامتلاك جانبين متميزين، كل هذه خصائص طوبولوجية.

إن الأشكال التي تُعتبر متشابهة عندما تكون مشوهة لها اسم خاص، فنحن نسميها الفراغات الطوبولوجية. التعريف الفعلي مجرَّد وتقني للغاية؛ لذا سأستخدم صورًا مجازية غير رسمية بدرجة أكبر. كل ما أقوله يمكن أن يكون دقيقًا ويُعطَى عليه دليل لائق.

يمكننا استخدام تلك الخصائص الطوبولوجية لإثبات أن الأسطوانة لا يمكن أن تتشوَّه إلى شريط موبيوس. وعلى الرغم من أنهما صُنعا عن طريق ربط طرفي شريط من الورق معًا، فإنهما فراغان طوبولوجيان مختلفان. والسبب هو أن شريط موبيوس له حافة واحدة وجانب واحد فقط. إذا مرَّرت إصبعك على طول الحافة، فإنه يدور مرتين قبل العودة إلى البداية، مع التبديل من أعلى إلى أسفل بسبب الدوران ١٨٠ درجة. إذا بدأت بتلوين السطح باللون الأحمر، فستدور حوله بالكامل، ثم تجد أنك تلون الجانب الخلفي من الجزء الذي لونته بالفعل، مرة أخرى بسبب الدوران ١٨٠ درجة. لذا فإن شريط موبيوس له خصائص طوبولوجية مختلفة مقارنةً بالأُسطوانة.

الشكل السفلي الأيمن يشبه دونات حلقية. يسمي علماء الرياضيات هذا الشكل طارة، ويشيرون به إلى السطح فقط، وليس الجزء الصلب حيث سيوضع العجين. في هذا الإطار، إنه أشبه أكثر بعوامة سباحة قابلة للنفخ. وبها ثقب. يمكنك وضع إصبعك من خلاله، أو في حالة عوامة السباحة، جسمك بالكامل. لكن الثقب ليس في السطح نفسه. إذا كان الأمر كذلك، فإن عوامة السباحة القابلة للنفخ ستُفرغ من الهواء وستغرق. يمكن للثقب أن يكون في مكان ليس فيه السطح. هذا جيد للغاية؛ إن مهندس شبكة الألياف واسعة النطاق الجالس داخل غرفة التفتيش موجود أيضًا في مكان ليس فيه السطح. لكن الفتحة لها حواف، في حين أن الطارة لها ثقب على الرغم من أنها ليس لها حواف. ومثل الأسطوانة، إن لها جانبين: الجانب الذي يمكننا رؤيته في الصورة، والآخر «من الداخل».

والشكل السفلي الأيسر أقل شيوعًا. إنه يُسمى قنينة كلاين، نسبة لعالم الرياضيات الألماني الكبير فيليكس كلاين، ولأنه يشبه القنينة. ربما كان الاسم عبارة عن تورية ألمانية، لأن كلمة Fläche في الألمانية تعني «السطح» وFlasche تعني «القنينة». الصورة مضللة من ناحية واحدة؛ يبدو أن السطح يمر من خلال نفسه. قنينة كلاين الرياضية لا تفعل

ذلك. ينشأ التقاطع الذاتي لأننا نرسم الصور بشكل طبيعي كما لو كان العنصر موجودًا في فراغ ثلاثي الأبعاد. وللحصول على قنينة كلاين لا تتقاطع مع نفسها، تحتاج إلى الانتقال إلى أربعة أبعاد، أو الأفضل من ذلك، اتباع ممارسة طوبولوجية قياسية من خلال تجاهل الحاجة إلى الفراغ المحيط تمامًا. بعد ذلك، يمكننا عرض قنينة كلاين على شكل أسطوانة ضُمَّت نهايتاها الدائريتان معًا، ولكن مع قلب إحداهما قبل إجراء الضم. للقيام بذلك في ثلاثة أبعاد، علينا أن ندسَّ هذه النهاية في الداخل ثم نفتحها للخارج مرة أخرى، ولكن يمكننا أيضًا القيام بذلك من الناحية المفاهيمية فقط عن طريق إضافة القاعدة التي توضح أنه عندما تسقط من أحد الطرفين ينتهي بك الأمر عند الطرف الآخر، وعكس الاتجاه حول الدائرة. لا تحتوي قنينة كلاين على أي حواف، مثل الطارة، ولكنها أيضًا تشبه شريط موبيوس في وجود جانب واحد فقط.

لقد تمكنَّا الآن من التمييز بين هذه الفراغات الطوبولوجية الأربعة جميعها. لقد حددنا ما إذا كانت لديها أعداد مختلفة من الحواف، أو أعداد مختلفة من الجوانب. أو أنواع مختلفة من الثقوب، إذا كان بإمكاننا فقط أن نقول ما نعنيه بالثقب. يفتح هذا العرض إحدى القضايا الأساسية للطوبولوجيا. كيف يمكنك معرفة ما إذا كان فراغان طوبولوجيان متماثلين أو مختلفين؟ لا يمكنك فقط إلقاء نظرة على الشكل، لأنه يمكن أن يتشوَّه. بالنسبة إلى عالم طوبولوجيا، كما يقول القول الشائع، الدونات مثل فنجان القهوة. عليك أن تستدعي الخصائص «الطوبولوجية» التي تميز الفراغَين.

قد يكون هذا صعبًا.

تبدو قِنِّينة كلاينت مثل لعبة عالم الرياضيات النموذجية. من الصعب أن نرى كيف يمكن أن تكون ذات صلة بالعالم الحقيقي. بالطبع، كما أصرَّ هيلبرت، فإن ألعاب الرياضيات مفيدة ليس في حدِّ ذاتها، ولكن من أجل النظريات التي تُلهمها، لذلك لا تحتاج قنينة كلاين إلى تبرير وجودها على نحو مباشر. لكن لقد تصادف أن هذا السطح الغريب يظهر في الطبيعة. إنه يظهر في النظام البصري للرئيسيات التي من بينها النسانيس، والقرود، وبالطبع نحن البشر.

منذ أكثر من قرن من الزمان اكتشف طبيب الأعصاب جون هيولينجز جاكسون أن القشرة الدماغية للإنسان تحتوي بطريقةٍ ما على خريطة طوبوغرافية لعضلات الجسم. القشرة هي السطح المُلْتَوي للدماغ، لذلك نحمل جميعًا خريطة لعضلاتنا داخل رءوسنا.

هذا منطقي؛ لأن الدماغ يتحكم في انقباض العضلات وانبساطها، مما يجعلنا نتحرك. جزء كبير من القشرة مخصص للرؤية، ونحن نعلم الآن أن القشرة البصرية تحتوي على خرائط متشابهة تعمل على تشغيل العملية البصرية.

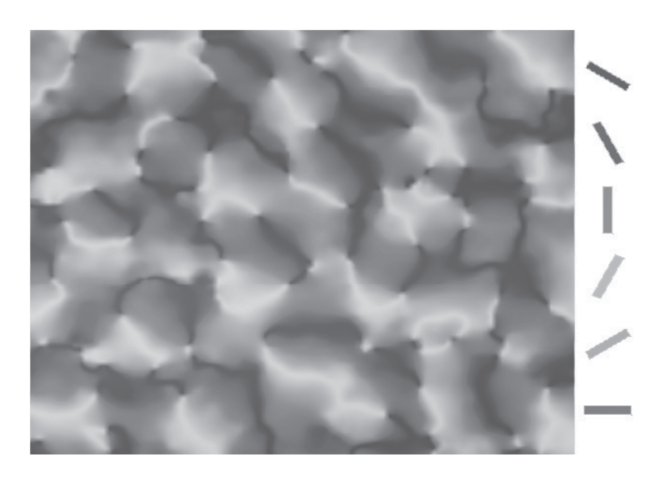
إن الرؤية ليست مجرد عين تعمل مثل كاميرا وترسل صورة إلى الدماغ. إنها أكثر تعقيدًا بكثير؛ لأن الدماغ يجب أن يتعرف على الصورة كما يستقبلها. ومثل الكاميرا، تحتوي العين على عدسة لتركيز الصورة الواردة، وتعمل شبكية العين على نحو ما مثل الفيلم. في الواقع، إن الأمر أقرب إلى الطريقة التي تسجل بها الكاميرات الرقمية الصور. يصطدم الضوء بمستقبلات صغيرة تُسمى الخلايا العصوية والمخروطية في الشبكية، وتنقل الوصلات العصبية الإشارات الناتجة إلى القشرة على طول العصب البصري، الذي هو مجموعة من الألياف العصبية المتعدِّدة. تُعالج هذه الإشارات على طول الطريق، لكن القشرة تقوم بمعظم عملية التحليل.

يمكن اعتبار القشرة البصرية على أنها سلسلة من الطبقات، واحدة فوق الأخرى. كل طبقة لها دور محدد تلعبُه. تكتشف الطبقة العليا، V1، الحدود بين أجزاء الصورة المختلفة. هذه هي الخطوة الأولى في «تقسيم» الإشارة إلى الأجزاء المكوِّنة لها. تُنقل معلومات الحدود بشكل أعمق في القشرة، وتُحلَّل في كل خطوة للنوع التالي من المعلومات التركيبية، ثم تحويلها لنقلها إلى الطبقة التالية. وبطبيعة الحال، يُعد هذا الوصف بمنزلة تبسيط، وكذلك «الطبقات»، كما أن الكثير من الإشارات تنتقل أيضًا في الاتجاه العكسي. يوجِد النظام بأكمله، في رءوسنا، تمثيلًا ثلاثي الأبعاد متعدِّد الألوان للعالم الخارجي؛ وهو تمثيل حي ومفصل لدرجة أننا نفترض على نحو تلقائي أنه العالم الخارجي. هذا ليس صحيحًا تمامًا؛ حيث تظهر مجموعة متنوعة من الأوهام البصرية وحالات الغموض. على أي حال، تقسم القشرةُ في النهاية الصورةَ إلى أجزاء يمكننا التعرف عليها على أنها قطة، أو خالتنا، أو أيًّا كان. وبعد ذلك يمكن للدماغ استدعاء معلومات إضافية، مثل اسم القطة أو فوز خالتنا مؤخرًا في اليانصيب.

تكتشف طبقة V1 الحدود باستخدام مجموعات من الخلايا العصبية الحساسة للحواف التي تشير إلى اتجاهات محدَّدة. تُظهر الصورة التالية جزءًا من V1، جرى الحصول عليه بالتسجيل البصري من القشرة البصرية لنسناس مكاك. إن الظلال المختلفة من الرمادي (المشار إليها بالألوان في الورقة البحثية الأصلية الخاصة بتلك التجربة) تتوافق مع الخلايا العصبية التي تتوهَّج عندما تتلقى البيانات التي تشير إلى

حافة في هذا الاتجاه. تندمج الألوان باستمرار من ظل إلى الذي يليه، باستثناء عند بعض النقاط المعزولة؛ حيث توجد جميع الألوان في مكان قريب، في نوع من تكوين لعبة المروحة الملوَّنة. هذه النقاط هي نقاط التفرُّد في مجال الاتجاه.

هذا الترتيب مقيَّد بالخصائص الطوبولوجية لمجال الاتجاه. هناك طريقتان فقط لترتيب سلسلة الألوان حول التفرد بحيث تتغير باستمرار: إما أن تتبع الألوان التسلسل في اتجاه عقارب الساعة، أو أنها تفعل ذلك في عكس اتجاه عقارب الساعة. تُظهر الصورة أمثلة على كليهما. إن وجود نقاط التفرد أمر لا مفر منه؛ لأن القشرة يجب أن تستخدم العديد من المراوح اللونية لتلتقط خطًّا كاملًا.



تُظهر الألوان (الظلال الرمادية هنا) الاتجاه الذي يخلق النشاط الأكبر في كل منطقة من القشرة. يتغير الاتجاه المدرَك بسلاسة، إلا عند نقاط التفرد، حيث تلتقي جميع الألوان.

السؤال الآن: كيف يجمع الدماغ معلومات الاتجاه هذه مع معلومات كيفية تحرك حافة ما؟ إن الاتجاهات لها سهم — الشمال عكس الجنوب، على الرغم من أن كليهما يقعان على الخط المستقيم نفسه — وبعد دوران ١٨٠ درجة ينعكس السهم. علينا أن نستمر في الدوران بزاوية ٣٦٠ درجة كاملة قبل أن يعود الاتجاه إلى حيث بدأ. لا تحتوي الحواف على سهم، وتعود إلى الموضع نفسه بعد ١٨٠ درجة. بطريقة ما، على القشرة أن

تجعل هذين الأمرين يعملان في الوقت نفسه. إذا رسمنا حلقة حول إحدى نقاط التفرد، فإن الاتجاهات تتغير باستمرار حول الحلقة، ولكن يجب أن ينعكس مجال الاتجاه من اتجاه معين إلى الاتجاه المعاكس — لنقُل من الشمال إلى الجنوب — مرة واحدة، أو عمومًا، عدد فردي من المرات. هذه الحقائق طوبولوجية بطبيعتها، وقد دفعت شيجيرو تاناكا إلى استنتاج أن المجالات المستقبلة يرتبط بعضها ببعض بطوبولوجيا قِنِّينة كلاين.[1] تم التحقق من هذا التوقع الآن تجريبيًّا في حيوانات مختلفة، من بينها نسانيس البومة، والقطط، وحيوانات ابن مقرض، مما يوفر دليلًا على أن تنظيم القشرة البصرية قد يكون متشابهًا في العديد من الثدييات المختلفة. لم تُجرَ التجارب على البشر لأسباب أخلاقية، لكننا من الثدييات، بل الرئيسيات. لذلك فمن المعقول أن يكون لدينا، مثل نسانيس المكاك، قِنِّينات كلاين في رءوسنا، تساعدنا على إدراك العناصر المتحركة.

هذه الأفكار لا تهم علماء الأحياء فقط. ففي مجال المحاكاة الحيوية سريع النمو، يأخذ المهندسون تلميحات من الطبيعة لتحسين التكنولوجيا، مما يؤدي إلى ظهور مواد وآلات جديدة. على سبيل المثال، لَعِب التركيب الغريب لعين الكركند دورًا مهمًّا في اختراع تلسكوبات أشعة إكس.[2] فلتركيز حزمة من أشعة إكس، عليك تغيير اتجاهها، لكنها نشطة جدًّا، لدرجة أن المرآة المناسبة يمكنها أن تحرف الحزمة فقط من خلال زاوية صغيرة جدًّا. وقد حل تطور الكركند مشكلة مماثلة للضوء المرئي منذ ملايين السنين، والهندسة نفسها تعمل مع أشعة إكس. يمكن نقل الفهم الجديد لطبقة V1 من القشرة في الثدييات إلى رؤية الكمبيوتر، مع التطبيقات المحتملة في أشياء مثل المركبات الذاتية القيادة والتفسير الآلي لصور الأقمار الصناعية للأغراض العسكرية أو المدنية.

إن السؤال الجوهري في الطوبولوجيا هو: «أي نوع من الأشكال هذا؟» أو «ما الفراغ الطوبولوجي الذي أنظر إليه هنا؟» قد يبدو سؤالًا مبتَذَلًا، لكن الرياضيات تقدِّم لنا فراغات طوبولوجية بطرق لا حصر لها — على هيئة صور، وصيغ، وحلول للمعادلات — لذلك ليس من السهل دائمًا التعرف على ما لديك. على سبيل المثال، يتطلب الأمر عالم طوبولوجيا لرؤية قِنِّينة كلاين في طبقة V1 لدى نسناس المكاك. قُمنا بعمل محاولة لحل هذه المشكلة عندما لاحظنا أن السمات الطوبولوجية تُميِّز الفراغات الأربعة في صورتي: الأسطوانة، وشريط موبيوس، والطارة، وقِنينة كلاين. قرب نهاية القرن التاسع عشر، وأوائل القرن العشرين، طوَّر علماء رياضيات طُرقًا منهجية للتعامل مع هذا السؤال. والفكرة الأساسية هي تحديد اللامُتغيرات الطوبولوجية: الخصائص التي يمكنك حسابها،

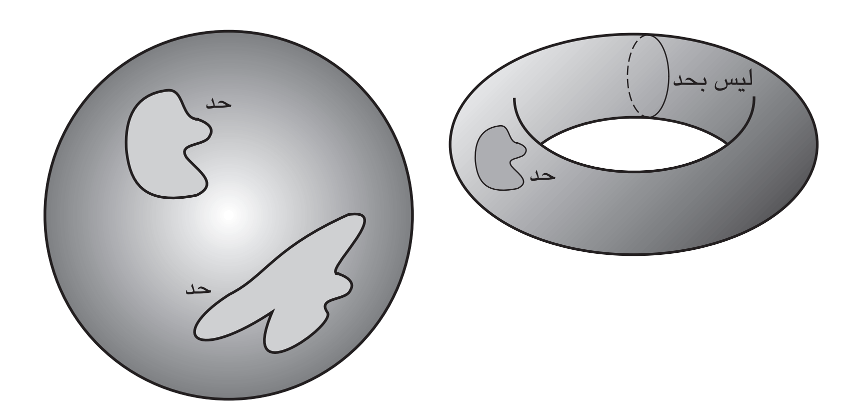
والمتشابهة بالنسبة للفراغات المتكافئة طوبولوجيًّا، ولكنها تختلف في بعض الفراغات غير المتكافئة على الأقل. عادةً لا تكون هذه حساسة بدرجة كافية للتمييز بين جميع الفراغات المختلفة، ولكن حتى التصنيف الجُزئي مفيد. فإذا كان لفراغين لا متغير مختلف من نوع ما، فمن المؤكد أن لكلٍّ منهما طوبولوجيا مختلفة. فعند فحص الأشكال الأربعة المشار إليها للتَّو، فإن اللامتغيرات هي أشياء مثل «كم عدد الحواف؟» و«كم عدد الجوانب؟»

على مدى العقود، تبيَّن أن بعض اللامتغيرات أكثر فائدة من غيرها، وحُدِّد بعض اللامتغيرات المهمة بشكل أساسي. أحدها، وهو الذي أريد مناقشته الآن، جزئيًّا لأنه اكتسب مؤخرًا بعض التطبيقات المهمة؛ يُسمَّى التماثل. في الأساس، إنه يحسب عدد ثقوب بُعد محدد في فراغ ما. في الواقع، إنه يذهب إلى أبعد من مجرد الحساب؛ فهو يجمع بين الثقوب واللاثقوب معًا في عنصر جبري واحد، يُسمى مجموعة التماثل.

هناك فراغ طوبولوجي أساسي للغاية لم أذكره بعد، وهو: الكرة. ومثلما هو الأمر مع الطارة، عندما يستخدم علماء الرياضيات هذه الكلمة، فإنهم يقصدون السطح الرفيع للغاية للكرة، وليس الجسم الصلب. (هذا يُسمى «الكرة المصمتة».) والكرة ليست لها حواف، مثل الطارة وقِنِّينة كلاين. يمكننا إثبات أنها تختلف طوبولوجيًّا عن كليهما من خلال ملاحظة وجود الثقوب أو عدم وجودها.

دعونا نبدأ مع الطارة. بصريًّا، يمكننا رؤية أن الطارة بها ثقب كبير في المنتصف. والكرات لا تبدو هكذا عن بعد. لكن كيف نحدد الثقب رياضيًّا، بطريقة لا تعتمد على الفراغ المحيط؟ الجواب هو النظر إلى المنحنيات المغلقة على السطح. يشكل كل منحنًى مغلق على كرة ما حدود منطقة هي، من الناحية الطوبولوجية، عبارة عن قرص، وهو الجزء الداخلي لدائرة.[3] إن إثبات ذلك أمر صعب للغاية، ولكن يمكن القيام به، لذلك لنفترض أنه صحيح. وعلى سطح الطارة، تحدِّد بعض المنحنيات المغلقة أيضًا حدود أقراص، لكن بعضها لا يفعل ذلك. في الواقع، أي منحنًى مغلق يمر «عبر» الثقب يفشل في الإحاطة بقرص. إن إثبات ذلك أمر صعب للغاية أيضًا، ولكن مرة أخرى دعنا نفترض أن هذا صحيح. إذن، لقد أوضحنا الآن أن الكرة تختلف طوبولوجيًّا عن الطارة، لأن «المنحنى المغلق» و«الإحاطة بقرص (طوبولوجي)» هما خاصيتان طوبولوجيَّتان.

يمكننا لعب هذه اللعبة في أبعاد أعلى. على سبيل المثال، في ثلاثة أبعاد، يمكننا أن نستبدل «سطحًا كُرَويًّا (على نحو طوبولوجي)» بـ «منحنًى مغلق» و«الإحاطة بكرة» بـ «الإحاطة بقرص». إذا وجدت كرة لا تحيط بكرة مصمتة، فإن الفراغ به نوع من الثقوب الثلاثية الأبعاد. للمُضي قُدمًا وإعطاء بعض التفسير لنوع الثقب، اكتشف علماء



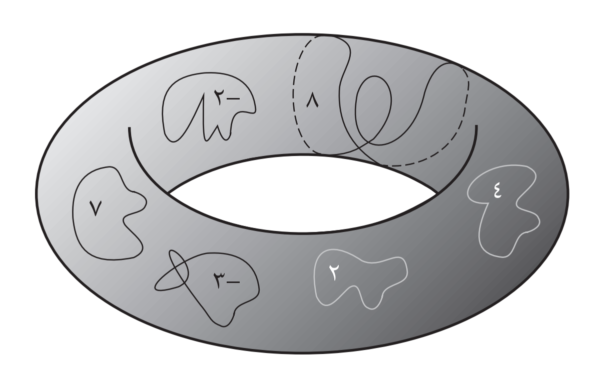
الشكل الأيمن: على الطارة، بعض المنحنيات المغلقة تكون حدودًا بينما البعض الآخر ليس كذلك. الشكل الأيسر: على الكرة، كل المنحنيات المغلقة هي بمنزلة حدود. Boundary حد not boundary ليس بحد

الطوبولوجيا الأوائل أنه يمكننا جمع وطرح المنحنيات المغلقة، أو الكرات. سأناقش كيف تسير الأمور مع المنحنيات على الأسطح؛ إن الأبعاد الأعلى تتبع نمطًا مماثلًا، لكنه أكثر تعقيدًا.

بالأساس، يمكننا جمع منحنيَين مغلقَين معًا عن طريق رسمهما على السطح نفسه. ولجمع مجموعة كاملة من المنحنيات، ارسمها جميعًا. هناك بعض التحسينات الفنية: غالبًا ما يكون من المفيد رسم سهم حول المنحنى لتحديد اتجاهه، ويمكنك رسم المنحنى نفسه عدة مرات، أو حتى عدد سالب من المرات. يشبه هذا تقريبًا رسم انعكاسه (المنحنى نفسه، لكن في الاتجاه المعاكس) عددًا موجبًا من المرات، وهو مفهوم سأوضحه بعد قليل.

تُسمى مجموعة المنحنيات، التي تحمل أرقامًا تخبرنا بعدد المرات التي رسمناها فيها، بالدورة. هناك عدد لا نهائي من الدورات الممكنة على سطحٍ ما، ولكن من الناحية الطوبولوجية، فإن العديد منها مكافئ للعديد من الدورات الأخرى. الآن، قلت للتو إن سالب الدورة هو نفس الدورة مع عكس جميع الأسهم. هذا ليس صحيحًا كما هو مذكور، لأن «نفس» تعني أنهما «متطابقتان»، وهما ليستا كذلك. لكن يمكننا جعلهما متطابقتين من خلال استخدام نسخة طوبولوجية من الحيلة التي يستخدمها مُنَظِّرو نظرية الأعداد في الحساب المقياسي. وفيها، على الرغم من اختلاف ٠ و٥، يمكننا التظاهر بأنهما

متطابقان، لأغراض مناسبة، والحصول على الحلقة $\mathbb{Z}_5$ للأعداد الصحيحة بمقياس ٥. في نظرية التماثُل، نفعل الشيء نفسه ونتظاهر بأن أي منحنًى مغلق يحيط بقرص هو نفسه منحنًى صفري؛ أي، لا تُرسم نسخ منه. يُسمى هذا المنحنى حدًّا، ويقال إنه متماثل مع الصفر. تمتد الفكرة نفسها إلى الدورات: تصبح الدورة متماثلة مع الصفر إذا كانت مزيجًا من المنحنيات، التي كل منها حد.



دورة على طارة.

يمكننا جمع دورتي C وD معًا للحصول على $C + D$، كما هو موضح سابقًا، ويمكننا طرحها عن طريق عكس السهم على D للحصول على $C - D$، باستثناء أن $C - C$ لا تحتاج إلى أن تساوي ٠. هذا أمر مزعج، ولكن هناك طريقة للتعامل مع ذلك: إنها دائمًا «متماثلة» مع الصفر. إذا تظاهرنا أن أي شيء متماثل مع الصفر هو صفر، فسنحصل على عنصر جبري لطيف يُسمى مجموعة التماثل للسطح. في الواقع، إننا نقوم بعمليات جبرية على الدورات مع تجاهل الحدود. هذا يشبه تمامًا كما نحسب بمقياس ٥ بتجاهل مضاعفات العدد ٥.

هذا هو التماثل.

مجموعة التماثل لكرة عديمة الأهمية: كل دورة متماثلة مع الصفر، وتتكون المجموعة من ٠ فقط. مجموعة التماثل لطارة ليست عديمة الأهمية: بعض الدورات ليست متماثلة مع الصفر. اتضح أن كل دورة متماثلة مع مضاعف عدد صحيح للدورة التي مُيِّزت

ب «ليس بحد» في الشكل قبل السابق، لذا فإن مجموعة التماثل للطارة هي شكل متخفٍّ من $\mathbb{Z}$، الأعداد الصحيحة. لن أُجري عمليات الجمع والرسوم البيانية هنا، لكن مجموعة التماثل الخاصة بقِنينة كلاين هي $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$، زوج $(m,\ n)$ من الأعداد الصحيحة بمقياس ٢. لذا فهي تحتوي على نوع من الثقوب، لكنه نوع مختلف من الثقوب عن الثقب الموجود (حسنًا، غير الموجود) في الطارة.

لقد استعرضت معكم على نحوٍ سريع البناء المعقَّد إلى حد ما لمجموعة التماثل لسبب معين، وهو إعطاؤكم فكرة عن كيفية بناء علماء الطوبولوجيا للَّامتغيرات. لكن النقطة الوحيدة التي تحتاجون إلى معرفتها هي أن كل فراغ له مجموعة تماثل، وهذا لا متغير طوبولوجي، ويمكنكم استخدامه لمعرفة الكثير عن الشكل الذي يمثله هذا الفراغ. إننا نتحدث من الناحية الطوبولوجية.

تعود مجموعة التماثل إلى البحث الرائد الذي قام به إنريكو بيتي وبوانكاريه في نهاية القرن التاسع عشر. كان نهجهما هو عد السِّمات الطوبولوجية، مثل الثقوب، ولكن تمت إعادة صياغته بلغة نظرية المجموعات في نهاية عشرينيات القرن العشرين من قِبَل ليوبولد فيتوريس، وفالتر ماير، وإيمي نوتر، وسرعان ما ظهرت تعميمات واسعة. إن ما أسمَيته مجموعة التماثل هو مجرد أول مجموعة من تسلسل كامل لمثل هذه المجموعات، وهو يحدد البنية الجبرية للثقوب ذات الأبعاد ١ و٢ و٣ وما إلى ذلك. هناك أيضًا مفهوم مكمِّل يُسمى الكوهومولوجيا، ومفهوم ذو صلة يُسمى الهوموتوبيا، وهو يدور حول كيفية تشوه المنحنيات وربط طرفيها، بدلًا من كيفية ارتباطها بالحدود. عرف بوانكاريه أن هذا البناء يعطي مجموعة، عادة ما تكون غير إبدالية. وقد أصبحت الطوبولوجيا الجبرية الآن مجالًا ضخمًا شديد التخصص، ولا يزال اكتشاف لا متغيرات طوبولوجية جديدة مستمرًّا.

هناك أيضًا مجال سريع النمو يُعرف باسم الطوبولوجيا التطبيقية. ونظرًا لأن جيلًا جديدًا من علماء الرياضيات والعلوم تعلموا الطوبولوجيا وهم في سن صغيرة، فقد وجدوا أنها أقل غرابة بكثير مما فعل الجيل الأكبر سنًّا. فهم يجيدون التعامل معها ببراعة، وأصبحوا يرون فُرَصًا جديدة في تطبيقها على المشكلات العملية. إن استخدام قِنينة كلاين في الرؤية مثال من علم الأحياء. وفي علوم المواد والهندسة الإلكترونية، نجد مفاهيم، مثل العوازل الطوبولوجية: وهي المواد التي يمكن تحويلها من مواد مُوصلة للكهرباء إلى عازلة لها، عن طريق تغيير طوبولوجيا خصائصها الكهربائية. والسمات الطوبولوجية، التي يحافَظ عليها من خلال التشوُّهات، تكون مستقرة للغاية.

وقد ظهر واحد من أكثر المفاهيم الواعدة في الطوبولوجيا التطبيقية عندما كان علماء الرياضيات البحتة يحاولون كتابة خوارزميات تخبر الكمبيوتر بكيفية حساب مجموعات التماثُل. لقد نجحوا في ذلك من خلال إعادة كتابة تعريف مجموعة التماثل بطريقة أكثر ملاءمة لحسابات الكمبيوتر. ثم تحولت هذه الأفكار إلى طريقة جديدة قوية لتحليل «البيانات الضخمة». ويستخدم هذا النهج الحديث للغاية، المطبَّق في جميع مجالات العلوم، أجهزة الكمبيوتر للبحث عن أنماط مخفية في البيانات العددية، وكما يوحي الاسم، تعمل هذه الأساليب بشكل أفضل مع الكميات الكبيرة جدًّا من البيانات. ولحسن الحظ، فإن أجهزة الاستشعار والإلكترونيات اليوم جيدة بشكل مذهل في قياس وتخزين ومعالجة كميات هائلة من البيانات. ولحسن الحظ على نحو أقل، غالبًا ما لا ندرك ما يجب فعله بالبيانات بمجرد جمعها، ولكن هذا هو بالضبط الموضع الذي تكمن فيه التحديات الرياضية الخاصة بالبيانات الضخمة.

لنفترض أننا قسنا ملايين الأعداد، ورسمناها من الناحية المفاهيمية على أنها نوع من سُحُب النقاط في فراغ متعدد الأبعاد من المتغيرات. لاستخراج أنماط ذات مغزًى من سحابة البيانات، نحتاج إلى العثور على السمات الهيكلية المهمة. ومن أبرزها «شكل» السحابة. ليس من المُجدي مجرد رسم النقاط على الشاشة والتحديق فيها؛ ربما كنا ننظر من زاوية خاطئة، أو قد تكون مناطق مهمة من النقاط محجوبة بنقاط أخرى، أو قد يكون عدد المتغيرات أكبر من أن يعالجها النظام البصَري على نحو معقول. والآن، كما رأينا، فإن «ما شكل هذا الشيء؟» هو سؤال أساسي في الطوبولوجيا. لذلك يبدو من المعقول أن تكون الطرق الطوبولوجية مفيدة؛ مثلًا لتمييز سحابة بيانات شبه كروية عن أخرى على شكل طارة بها ثقب. لقد قمنا بعمل نسخة مصغرة من هذا في مشروع «فراكمات» الذي ذكرته في الفصل الثامن. ما كان يهم هناك هو مدى دمج سحابة النقاط، وما إذا كانت مستديرة أم على شكل سيجار. ولم تكن التفاصيل الطوبولوجية الدقيقة مهمة.

لا يمكننا فهم الطوبولوجيا يدويًّا باستخدام مليون نقطة بيانات؛ علينا استخدام جهاز كمبيوتر. لكن أجهزة الكمبيوتر ليست مصمَّمة لتحليل الطوبولوجيا. لذلك كان قد أُعيد توجيه الأساليب التي كان علماء الرياضيات البحتة يُطوِّرونها من أجل حساب الكمبيوتر لمجموعات التماثل إلى مجال البيانات الضخمة. وكالعادة، لم تؤدِّ المهمة المطلوبة بالكامل إذا استُخدمت على حالتها البحتة. كان لا بد من تعديلها لتلائم المتطلبات الجديدة للبيانات الضخمة، التي كان أهمها أن شكل سحابة البيانات ليس شيئًا محدَّدًا على نحو جيد. يعتمد ذلك، بشكل خاص، على المقياس الذي تراقبها به.

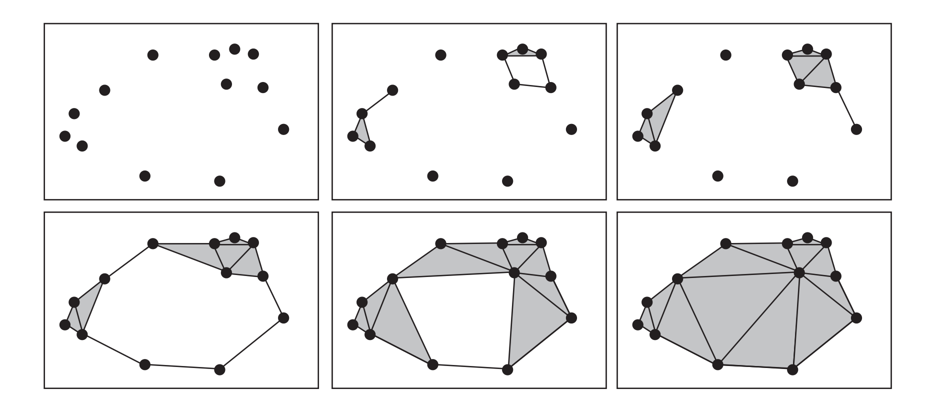
لنتخيَّل، على سبيل المثال، التفاف خرطوم مرن على شكل ملف. عند النظر إليه من مسافة متوسطة، فإن مَقطعًا من الخرطوم سيُشبه شكل المنحنى، الذي يعتبر على نحوٍ طوبولوجي عنصرًا أُحادي البعد. ومن مسافة أقرب، سيبدو وكأنه سطح أسطواني طويل. ومن مسافة أكثر قربًا، سيكتسب السطح سُمكًا؛ علاوة على ذلك، هناك ثقب يمتد على طول منتصف الأسطوانة. وبالتراجع والنظر إليه من مسافة بعيدة، ولكن مع زاوية واسعة، سيتضح أن الخرطوم ملفوف مثل زُنبُرك مضغوط. اجعل رؤيتك أقل دقةً وسيتحول الملف إلى شكل طارة.

هذا النوع من التأثير يعني أن شكل سحابة البيانات ليس مفهومًا ثابتًا. لذا فإن مجموعة التماثل ليست فكرة رائعة أيضًا. بدلًا من ذلك، تساءل علماء الرياضيات عن كيفية تغير الطوبولوجيا المدرِكة لسحابة البيانات مع تغير مقياس الملاحظة.

وبالبدء مع سحابة ومقياس طول محدَّد، يمكننا إنشاء ما يسميه علماء الطوبولوجيا «معقد مبسطات» من خلال ربط نقطتين بحافة كلما كانت هاتان النقطتان أقرب معًا من مقياس الطول. ثم تحيط الحواف القريبة من بعضها بمثلثات، وتحيط المثلثات القريبة من بعضها بأشكال رباعية السطوح، وهكذا. ويُسمى الشكل الرباعي السطوح المُتعدِّد الأبعاد بالمبسط، ومجموعة من المبسطات، المرتبط بعضُها ببعض بطريقة ما، تُسمى معقد مبسطات. والاسم الأبسط، «التثليث»، سيفي بالغرض هنا. فقط تذكر أن المثلثات يمكن أن تكون لها أي أبعاد.

عندما يكون لدينا تثليث، فهناك قواعد رياضية لحساب التماثل. لكن الآن، يعتمد التثليث على مقياس الملاحظة. لذا فإن التماثل يعتمد على ذلك أيضًا. ويصبح السؤال المثير للاهتمام حول الشكل هو: كيف يتغير تماثل التثليث مع تغيُّر المقياس؟ يجب أن تكون سمات الشكل الأكثر أهمية أقل عُرضة للتغيير من السمات العابرة التي تعتمد بشكل حساس على المقياس. لذلك يمكننا التركيز على جوانب مجموعة التماثل التي تستمر عندما يتغيَّر المقياس. تُعرف الأداة الناتجة، التي ليست مجرد مجموعة تماثل، ولكن زمرة منها، واحدة لكل مقياس، باسم التماثل المستمِر.

يُظهر تسلسل الصور الست هنا أي النقاط التي ترتبط معًا عند مقاييس مختلفة. فمع زيادة مقياس الطول، ونحن ننظر إلى تراكيب أقل تفصيلًا، تبدأ سحابة أولية من النقاط المعزولة في تكوين تجمُّعات صغيرة، يحتوي أحدها على ثقب صغير. ثم يمتلئ هذا الثقب وتنمو التجمعات. ثم تنضم التجمعات معًا وتكون حلقة للكشف عن ثقب

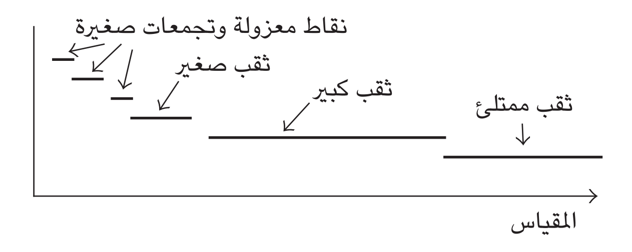


يؤدي ربط نقاط البيانات التي تفصل بينها مسافات مختلفة إلى إنشاء سلسلة من التثليثات، مما يكشف عن ثقوب بأحجام مختلفة. ويكشف التماثل المستمر هذه التأثيرات.

كبير. تزداد سماكة هذا الثقب، لكنه يظل ثقبًا كبيرًا، حتى يصبح المقياس كبيرًا؛ لدرجة أن كل شيء يُملأ. هذا الشكل تخطيطي والتفاصيل التي ستضيفها خوارزمية الكمبيوتر قد حُذفت من أجل الوضوح. والسمة السائدة، التي تحدث مع أكبر نطاق من مقاييس الطول، هي الثقب الكبير في الوسط.

لاحظ أن هذا الوصف يتضمن معلومات عن المسافة وكذلك الطوبولوجيا. من الناحية التقنية، لا يحتاج التحويل الطوبولوجي إلى الحفاظ على المسافات، ولكن في تحليل البيانات القِيَم الفعلية للبيانات مهمة، وكذلك الشكل الطوبولوجي العام. لهذا السبب، فإن التماثل المستمِر يُولي اهتمامًا لخصائص القياس وكذلك للخصائص الطوبولوجية. تتمثل إحدى طرق عرض المعلومات التي توفرها التماثلات المستمرة في إنشاء باركود يستخدم خطوطًا أُفُقية لتمثيل نطاق المقاييس التي تستمِر فيها سمات تماثُلية محددة (مثل الثقوب). على سبيل المثال، قد يبدو الباركود لسحابة النقاط في الشكل السابق قليلًا مثل الباركود الموجود في الشكل التالي. فالباركود هو ملخص تخطيطي لكيفية اختلاف الطوبولوجيا مع المقياس.

إن التماثُل المستمر وأشكال الباركود الخاصة به كلها أشياء رائعة للغاية، ولكن فيمَ يمكن الاستفادة منها؟



يوضح الباركود الخاص بالتماثُل المستمِر أي التراكيب تستمر وفق أي مقاييس. (الشكل هنا تخطيطي.)

تخيل أنك تدير عملًا تجاريًّا، ويقع مقرُّه في أرض خالية في غابة. يمكن أن يتسلل اللصوص إلى مكان عملك عبر الغابة دون أن يراهم أحد. لذلك ركبت مجموعة من أجهزة الاستشعار، يمكن لكلٍّ منها اكتشاف الحركة والتواصل مع أجهزة الاستشعار المجاورة، وتشغلها ليلًا. فإذا اقترب أي شخص، مصرَّح له بذلك أم لا، فإن أجهزة الاستشعار ستُطلق إنذارًا ويمكن لأفراد الأمن بالمقر الذهاب إليه والتحقق من هُويته. أو تخيل أنك جنرال يُدير قاعدة عسكرية في منطقة تنشط فيها الجماعات الإرهابية. ستفعل شيئًا مشابهًا، مع حمل الحُراس للأسلحة.

كيف يمكنك التأكد من أن تغطية أجهزة الاستشعار كافية، دون فجوات قد يتسلَّل عبرها المجرم أو الإرهابي؟

إذا كنت تستخدم عددًا صغيرًا من أجهزة الاستشعار، فيمكنك تحديد توزيعها على خريطة ومراقبة النتيجة. لكن مع استخدام أعداد أكبر منها، أو وجود مشكلات متنوعة بسبب جغرافيَّة المكان، يصبح هذا أقل عمليةً. ومن ثَم أنت تحتاج إلى طريقة لاكتشاف الفجوات في تغطية أجهزة الاستشعار. اكتشاف الفجوات أو الثقوب؟ يبدو أن تلك هي مهمة التماثل المستمر. وفي الواقع، هذا أحد الاستخدامات العديدة، الذي ظهر في المدة الأخيرة، لهذه الفكرة الجديدة. وهناك تطبيق مماثل هو «تغطية الحاجز»، الذي من خلاله نحدد ما إذا كانت مجموعة من أجهزة الاستشعار تحيط تمامًا بمبنًى أو مجمَّع مهم. وهناك أيضًا «التغطية الشاملة» مع أجهزة استشعار يمكنها التحرك؛ هناك نسخة منزلية أو تجارية تُستخدم في المكانس الكهربية المزوَّدة بروبوت. فهل ستنظف الأرضية بأكملها؟

هناك تطبيق علمي أكثر يقترن بطريقة النافذة المنزلقة لإعادة بناء الجاذب الديناميكي التي ذكرتها في الفصل الثامن. يمكن أن يكتشف التماثل المستمِر الوقتَ الذي تتغير فيه طوبولوجيا الجاذب على نحو كبير. في نظرية الأنظمة الديناميكية، يُسمى هذا التأثير بالتشعُّب، وهو يشير إلى حدوث تغيير كبير في الديناميكا. أحد التطبيقات المهمة يتمثَّل في معرفة كيف تغيَّر مناخ الأرض على مدى ملايين السنين من الفترات الدافئة إلى العصور الجليدية، وحتى إلى التغطية الجليدية الكلية للأرض وَفق نظرية الكرة الأرضية الثلجية. لقد أوضح جيسي بيروالد وزملاؤه أن أشكال الباركود الخاصة بسحب البيانات وَفق طريقة النافذة المنزلقة تقوم بعمل ممتاز في تحديد التغييرات في نظام المناخ العام.[4] وهناك حالات أخرى تطبَّق فيها الطريقة نفسها على أنظمة مادية مختلفة، من بينها الاهتزازات في أدوات الآلات المستخدمة في التصنيع، التي تترك العيوب والعلامات غير المرغوب فيها على أسطح العناصر المصنَّعة. وقد أوضح فراس خصاونة وإليزابيث مانش أن قياسات المتسلسلات الزمنية لأداة القطع يمكن أن تلتقط هذا النوع من الاهتزاز، المعروف في مجال التصنيع باسم «الثرثرة».[5] وهناك أيضًا تطبيقات في مجال الأشعة الطبية، مثل اكتشاف ازدواج الصوت في الحنجرة عند فحصها بمنظار فيديو، مثلما أوضح كريستوفر ترالي وجوزيه بيريا.[6] يحدث هذا التأثير عندما يُنتج الحبل الصوتي ترددين من الصوت في الوقت نفسه، ويمكن أن يشير إلى وجود تقرُّحات أو شلل. والفحص بالمنظار يتضمَّن إدخال كاميرا مثبتة في طرف كابل ألياف ضوئية، عبر الأنف وأسفل الحلق. وقد استخدمت صبا عمراني وآخرون[7] أشكال الباركود الخاصة ببيانات الصوت للكشف عن صوت الصفير في صدور المرضى، وهو صوت غير طبيعي عالي النغمة يمكن أن يكون مؤشرًا على الانسداد الجزئي للمسالك الهوائية أو أمراض الرئة مثل الرَّبو، وسرطان الرئة، وفشل القلب الاحتقاني.

هل لديك مشكلة مع بياناتك؟ هل تحتاج إلى مساعدة على وجه السرعة؟ اتصِل بعالم الطوبولوجيا.

الفصل الرابع عشر

الثعلب والقُنفُذ

يَعرف الثعلب أشياء كثيرة، لكن القُنفُذ يعرف شيئًا واحدًا كبيرًا.

مقولة منسوبة إلى أرخيلوخوس، ٦٥٠ ق.م. تقريبًا

عند البحث عن مصدر إلهام لهذا الكتاب، عثرت على هذه المقولة: Πόλλ’ οἶδ’ ἀλώπηξ, ἀλλ’ ἐχῖνος ἓν μέγα. لقد تعلمت اللاتينية في المدرسة، وليس اليونانية، لكن علماء الرياضيات يعرفون حروفهم اليونانية. حتى إنني أستطيع التعرف على كلمتَي echinos وmega، وعمل تخمين ملائم، لذلك فهي مقولة ذات صلة بقنفذ كبير. إنها في الواقع تُترجَم على النحو التالي: «يعرف الثعلب أشياء كثيرة، لكن القنفذ يعرف شيئًا واحدًا كبيرًا». وربما يكون قد صاغها الشاعر اليوناني القديم أرخيلوخوس، لكن هذا غير مؤكد.

هل يجب أن أكون ثعلبًا أم قُنفُذًا؟ هل يجب أن أحاول وصف مجموعة مختارة من التطورات المذهلة التي لا حصر لها في الرياضيات على مدى الخمسين عامًا الماضية، وكيف استُخدِمت؟ أم يجب أن أركز على «شيء واحد كبير»؟

لقد قررت أن أفعل الأمرين.

لقد استعرضنا معًا الجزء الخاص بالثعلب، عبر ثلاثة عشر فصلًا. والآن يأتي جزء القُنفُذ، للحصول على الخلاصة التي أريد توصيلها من الكتاب.

عند إلقاء نظرة على الموضوعات التي تناولتها، أجدُني مندهشًا من ثراء وتنوع المجالات المختلفة للرياضيات التي شقَّت الآن طريقها إلى الأنظمة والأجهزة التي تميز الحياة في أوائل القرن الحادي والعشرين. ليس فقط من أجل الأغنياء في الدول الديمقراطية الغربية، على الرغم من أنهم ربما يستفيدون أكثر من أولئك الناس الأقل ثراءً، ولكن من

أجل مليارات الناس في كل بلدان العالم. لقد نقل الهاتف المحمول الاتصالات الحديثة إلى البلدان النامية. إنه الآن في كل مكان، وقد غيَّر كل شيء. ليس دائمًا للأفضل؛ إذ إن التغيير هو سلاح ذو حدين. ودون الرياضيات، والكثير من الناس الذين تدربوا على استخدامها على مستوًى متقدِّم، ما كانت لتوجد هواتف محمولة.

أنا أيضًا على دراية بالعدد الهائل من التطبيقات التي لم يكن لديَّ مساحة لأذكرها. وتلك التي استعرضتُها هنا ليست بالضرورة هي الأفضل أو الأكثر أهمية أو الأكثر إثارة للإعجاب أو الأكثر قيمة. إنها مجرد مجموعة من التطبيقات التي جذبتني لأنها استعانت بأفكار رياضية جيدة، وفي الغالب جديدة، واستخدمتها في مجال يُعَد بمثابة مفاجأة، لأن هذا النوع من الأفكار الرياضية لم يُبتكر لهذا الغرض على الإطلاق. أنا أيضًا قصدت التنوع؛ إذ لا أعتقد أنه كان من المنطقي أن أُخصص ٩٠٪ من الكتاب للمعادلات التفاضلية الجزئية التطبيقية، على سبيل المثال، رغم أنه كان من السهل العثور على مادة علمية كافية وتبرير أهميتها. لقد أردت أن أُبين لكم مدى التنوع والنطاق الواسع لاستخدامات مجالي في وقتنا الحاضر، بالإضافة إلى إثبات أهميته للإنسانية ككل.

ولإرضاء ضميري، سأذكر على نحو مختصر بعضًا من مئات التطبيقات الأخرى التي كان بإمكاني إخباركم عنها بدلًا من ذلك. حتى هذه مجرد قمة جبل جليدي يختفي الجزء الأكبر منه تحت مياه المحيط. أثناء عملية البحث عن المادة العلمية لهذا الكتاب، جمعت ملفًّا عنها، وهذه الأمثلة مأخوذة منه. وهي ليست مذكورة وَفق أي ترتيب خاص.

التنبؤ بمستويات الفيضانات.
تحليل البيانات الضخمة وداء لايم.
عدد الهزات التي يتطلبها إخراج الكاتشب من الزجاجة.
كيفية تحسين استخدام الخشب في مصنع لنَشْر الأخشاب.
أفضل طريقة لعزل منزل أو ماسورة.
اكتشاف التحيُّز (على أساس العِرق أو نوع الجنس) في الخوارزميات.
صلابة الهياكل الهندسية، مثل هياكل المباني المصنوعة من الصلب.
اكتشاف الخلايا السرطانية باستخدام الكمبيوتر.
تحسين طرق الحصول على سماكة ثابتة عند تصنيع ألواح الزجاج.
إنتاج ثاني أكسيد الكربون عند تماسك الخرسانة.
تصميم أنظمة مفاتيح رئيسية للمباني المكتبية.

نَمْذَجة قلبٍ افتراضي باستخدام الكمبيوتر.
تصميم المباني لمقاومة الأعاصير.
اكتشاف صلات القرابة بين الأنواع.
تخطيط حركات الروبوتات الصناعية.
الجوانب الوبائية الخاصة بأمراض الماشية.
الاختناقات المرورية.
بناء شبكة كهرباء حسَّاسة لحالة الطقس.
تحسين مقاومة المجتمعات للمد العاصِفي للأعاصير.
كابلات الاتصالات الموجودة تحت الماء.
اكتشاف الألغام الأرضية في البلدان التي انتهت فيها الحروب.
التنبؤ بحركة الغبار الخارج من البراكين لمساعدة شركات الطيران.
تقليل تقلبات الجهد في شبكات الطاقة.
تحسين كفاءة اختبارات الفيروسات خلال جائحة كوفيد-١٩.

إن كلًّا من هذه الموضوعات كان يستحق تخصيص فصل كامل لاستعراضه. فهي تضيف المزيد من الأمثلة على التنوع الهائل للطرق التي تُستخدم بها الرياضيات لصالح الجميع على هذا الكوكب.

نظرًا لأن هذه الأمثلة، والأمثلة الأخرى التي ناقشتُها بمزيد من التفصيل، قد أوضحت أن التنوع الهائل لتطبيقات الرياضيات أمر محير للعقل، خاصةً عندما ندرك أن الكثير منها ظهر في الأصل بهدف مختلف، أو فقط لأن أحد علماء الرياضيات في مكان ما في وقت ما اعتقد أنه قد يكون من المثير للاهتمام العمل عليه. وهذا مرة أخرى يثير القضية الفلسفية العميقة التي حيرت فيجنر في عام ١٩٥٩. وقد ظلت — بالنسبة لي، على الأقل — محيرة الآن مثلما كانت آنذاك. بل زادت حيرتي أكثر بشأنها. لقد ركز فيجنر بشكل أساسي على الفعالية اللامعقولة للرياضيات في الفيزياء النظرية، لكننا نجد الآن أنها فعالة على نحو غير معقول في نطاق أوسع وأكثر إلحاحًا من الأنشطة البشرية. معظمها حتى ليست له علاقة واضحة بأي شيء رياضي.

وأنا، مثل فيجنر، لست مقتنعًا بالتفسير الذي يقترحه الكثير من الناس، والذي يرى أن الرياضيات مستمَدة من العالم الحقيقي، ومن ثَم يجب أن تكون فعَّالة في العالم

الحقيقي. فكما قلت من قبل، أعتقد أن هذا يُغفِل الحقيقة، على الرغم من أنه يفيد في تفسير الفعالية «المعقولة». والقصص التي رويتُها في هذا الكتاب توضح بعض السمات التي تجعل الرياضيات مفيدة في مجالات لا علاقة لها على ما يبدو بأصولها. لقد عرَّف عالم الرياضيات والفيلسوف بنجامين بيرس، الرياضيات بأنها «العلم الذي يستخلص الاستنتاجات اللازمة». ففي ضوء مجموعة من الظروف، ما الذي سيحدث؟ هذه قضية عامة للغاية وشائعة في معظم المشكلات التي تنشأ في العالم الخارجي. ولأن الرياضيات في هذه الأيام عامة للغاية، فهي توفِّر مجموعة من الأدوات المفيدة للإجابة على مثل هذه الأسئلة، فقط هي في انتظار أن تُستخدم. نحن لا نحتاج إلى تصور كل استخدام ممكن للمطرقة من أجل أن نقرر أن المطرقة قد تستحق الاقتناء. إن القدرة على ربط الأشياء معًا، أو تفكيكها عن بعضها، لهي تقنية عامة من المحتمل أن تكون قابلة للتطبيق على نطاق واسع. تنجح المطرقة في إنجاز مهمة معينة، لذلك قد تصلح لإنجاز المهام الأخرى. لذا، غالبًا ما يمكن نقل طريقة رياضية استخدمت على نحو رائع في تطبيق واحد، بعد تعديلها على نحو مناسب، إلى تطبيقات أخرى.

وهناك تعريف آخر للرياضيات يعجبني، وهو تعريف لين آرثر ستين، الذي يرى أنها «علم الشكل الدال». فجوهر الرياضيات هو «البِنية». إنها تدور حول كيفية الاستفادة من البنية لفهم مشكلةٍ ما. مرة أخرى، تعتبر وجهة النظر هذه واحدة عامة للغاية، وتظهر التجربة أنها يمكن أن تعبر عن جوهر الأمر.

وهناك تعريف ثالث، قُدم على نحوٍ يائس، وهو أن الرياضيات هي «ما يمارسه علماء الرياضيات». ومن ثَم نضيف أن عالم الرياضيات هو «شخص يمارس الرياضيات». أعتقد أننا نستطيع أن نفعل ما هو أفضل من التكرار. هل التجارة هي «ما يمارسه التجار»، والتاجر هو «شخص يمارس التجارة»؟ أجل، ولكن هناك ما هو أكثر من ذلك. ما يجعل شخصًا ما رائد أعمال ناجحًا ليس ممارسة التجارة على هذا النحو؛ إنه يقتنص «فرصة» للمتاجرة تجاهلها الآخرون. وبالمثل، فإن عالم الرياضيات هو شخص يقتنص فرصة لممارسة الرياضيات تجاهلها الآخرون.

إن طريقة القيام بذلك هي التفكير على نحو رياضي.

وعلى مر القرون، طوَّر علماء الرياضيات طرق تفكير بديهية تستهدف الجوانب الأساسية للمشاكل. إنهم يطرحون أسئلة، مثل: ما السياق الطبيعي للمشكلة؟ ما نطاق الاحتمالات؟ ما البنية الطبيعية التي من خلالها يمكن التعبير عن الخصائص ذات الصلة؟

ما السمات الأساسية، وما تلك التي تعتبر تفاصيل دقيقة غير ذات صلة، أو أشياء تشتت الانتباه يمكن تجاهلها؟ وكيف نتجاهلها؟ وما البنية الطبيعية لما تبقَّى؟ لقد صقل المجتمع الرياضي تلك الأساليب من خلال التعامل مع عدد لا يُحصى من المشكلات الصعبة، وطورها إلى نظريات متميزة وفعَّالة، واختبرها بأن جعلها تتصدَّى لمشاكل من العالم الحقيقي. ومن ثَم أصبحت على نحو متزايد تتصف بأنها عامة، ومترابطة، وفعالة، وقابلة للتطبيق المتعدِّد.

ربما تكون فعالية الرياضيات ليست لا معقولة للغاية.

وربما هي ليست لغزًا على الإطلاق.

تخيل عالَمًا دون رياضيات.

أسمع الكثير من الأشخاص الذين يُهلِّلون فرَحًا لذلك بكل حماس، وأنا متعاطف معهم؛ لأنه لا ينبغي أن يصبح كل ما يروق لي يروق لك أنت أيضًا. لكنني لا أتحدث عنك شخصيًّا وأنت تتجنب الاضطرار إلى تعلم الرياضيات. فالأمر يتجاوزك.

لنفترض أن هناك في الكون المتَّسِع إلى ما لا نهاية حضارة فضائية تستهلك كميات هائلة من الرياضيات. أعني هذا حرفيًّا. يجادل بعض الفيزيائيين بأن الرياضيات فعَّالة على نحو لا معقول في تفسير الكون لأن الكون «مصنوع» من الرياضيات. والرياضيات ليست تقنية بشرية لفهم الأشياء؛ إنها حقيقية، إنها مادة غير ملموسة مدمَجة في كل الأشياء الموجودة حولنا.

أنا شخصيًّا أعتقد أن هذا الرأي مجنون، ويسفه اللغز الفلسفي، لكن الكائنات الفضائية تعرف أنني مخطئ. لقد اكتشفت منذ مليار سنة أن الكون مصنوع بالفعل من الرياضيات. وحضارتها تستهلكها بكميات هائلة، تمامًا كما نستنفد العديد من موارد الأرض. في الواقع، لقد استهلك الفضائيون الكثير من الرياضيات لدرجة أنهم كادوا أن يستنفدوها منذ مدة طويلة، لولا حلٌّ بسيط. إن قدراتهم التقنية متقدمة للغاية وتوجُّهاتهم عدوانية للغاية؛ لذلك يُرسلون أساطيل من سفن الفضاء العملاقة بين النجوم، وهي مدجَّجة بالأسلحة، للبحث عن حياة جديدة والاستيلاء على الرياضيات الموجودة هناك.

«الماثيفوريون»، أو آكلو الرياضيات، قادمون.

إنهم، عندما يصلون إلى عالم جديد، «يأكلون» كل الرياضيات الموجودة فيه. ليس فقط الأفكار، ولكن المادة غير الملموسة نفسها، وكل شيء اعتمد يومًا على هذا المجال

يختفي أيضًا؛ نظرًا لأنه سيحرم من تدعيمه له. يفضل الماثيفوريون المواد الغذائية الأكثر نقاءً، لذلك يبدءون بالرياضيات المتقدمة للغاية، ثم يلتهمون كل ما يجدونه في طريقهم حتى يصلوا إلى الأشياء التقليدية. إنهم يغادرون عمومًا عندما يصلون إلى العمليات الحسابية البسيطة، مثل الضرب المطول؛ لأنهم لا يجدون مثل هذه العمليات مستساغة على نحو جيد، لذا فإن الحضارة في العالم الذي هاجموه لا تنهار بالكامل. لكن تصبح ظلًّا شاحبًا لمجدها السابق، وتتناثر في أنحاء المجرَّة كواكب دُفِع سكانها الأصليون إلى العودة إلى «عصور الظلام» دون أي إمكانية للنجاة.

إذا وصل الماثيفوريون إلى كوكبنا غدًا، فماذا سنخسر؟

ربما لن نلاحظ عندما تختفي مجالات البحث المتقدمة الخاصة بالرياضيات البحتة. فعلى الرغم من أن بعضًا منها قد يصبح أمرًا حيويًّا بعد قرن من الزمان، فإنه ليس ضروريًّا الآن. ولكن ما إن يبدأ الماثيفوريون في استكمال زحفهم في المسار الرياضي، حتى تبدأ أشياء مهمة في الاختفاء. أول ما سيختفي هو أجهزة الكمبيوتر والهواتف المحمولة والإنترنت، وهي المنتجات الأكثر تطورًا من الناحية الرياضية على هذا الكوكب. وسيلي ذلك اختفاء أي شيء له صلة بالفضاء: الأقمار الصناعية الخاصة بالطقس، والأقمار الصناعية الخاصة بالبيئة، والأقمار الصناعية الخاصة بالاتصالات، والمِلاحة عبر الأقمار الصناعية، والملاحة الجوية، والبث التليفزيوني المرتبط بالأقمار الصناعية، ومراصد التوهُّجات الشمسية. وستتوقف محطات الطاقة الكهربائية عن العمل. وستتعطل الروبوتات الصناعية، وتندثر قطاعات التصنيع، ونعود إلى المكانس اليدوية بدلًا من المكانس الكهربائية. ولن توجد طائرات نفاثة؛ إذ لن يمكننا تصميمها بعد الآن دون أجهزة كمبيوتر، كما أننا بحاجة إلى الديناميكا الهوائية لمعرفة كيفية جعلها تظل محلقة. وسيتلاشى الراديو والتليفزيون فجأة وتمامًا، لأن هاتين التقنيتين تعتمدان على معادلات ماكسويل للإشعاع الكهرومغناطيسي؛ أي، موجات الراديو. وستنهار كل المباني الشاهقة، لأن تصميمها وبناءها يعتمدان بشكل كبير على الأساليب الحاسوبية ونظرية المرونة لضمان السلامة الهيكلية. ولن تعود هناك ناطحات سحاب، ولا مستشفيات ضخمة، ولا استادات رياضية.

سيرتدُّ التاريخ إلى الخلف. ففي هذا السيناريو، ها نحن قد عدنا بالفعل إلى ما كانت عليه الحياة منذ قرن من الزمان، وما هي إلا مجرد البداية بالنسبة للماثيفوريين.

يمكن القول إن بعض الخسائر جيدة؛ الأسلحة النووية، على سبيل المثال، ومعظم التطبيقات العسكرية الأخرى للرياضيات، على الرغم من أننا سنفقد أيضًا القدرة على

الدفاع عن أنفسنا. إن الرياضيات في حد ذاتها محايدة؛ ما هو جيد أو سيئ يعتمد على ما يستخدمها البشر فيه.

وتكون بعض الخسائر محيرة؛ إذ ستوقِف البنوك جميع الاستثمارات في أسواق الأوراق المالية؛ لأنها ستفقد القدرة على التنبؤ بما ستفعله، مما يقلل من مخاطرها المالية. لا يحب المصرفيون المخاطر، باستثناء تلك التي لا يدركونها إلا عندما ينهار النظام المالي. هذا يقلل من هَوَسنا المدمِّر لذواتنا بالمال، لكنه يمنع أيضًا الكثير من المشاريع المفيدة من الحصول على التمويل.

ستكون معظم الخسائر سيئة. ستعود عملية التنبؤ بالطقس إلى مرحلة لعق الإصبع ورفعه لأعلى لمعرفة الاتجاه الذي تهب منه الريح. وسيفقد الطب ميزات أجهزة الأشعة وقدرته على وضع نماذج انتشار الأوبئة، على الرغم من أنه سيحتفظ بتقنيات التخدير وأشعَّة إكس. وسيختفي تمامًا أي شيء يعتمد على الإحصاء. ولن يعود بإمكان الأطباء تقييم سلامة وفعالية الأدوية والعلاجات الجديدة. وستفقد الزراعة القدرة على تقييم سلالات جديدة من النباتات والحيوانات. ولن يعود بإمكان قطاعات التصنيع المراقبة الفعَّالة للجودة، لذا فإن كل ما ستشتريه — من النطاق المحدود من البضائع الذي سيبقى متاحًا — سيكون غير موثوق به. وستفقد الحكومات القدرة على التنبؤ بالتوجُّهات والمطالب المستقبلية. صحيح أنها ربما لم تكن جيدة بشدة في ذلك على أي حال، لكن قدرتها الآن في هذا الشأن ستقل للغاية. وسترتد اتصالاتنا إلى الحالة البدائية، ولن نجد حتى التلغراف. وسيصبح إرسال رسائل على ظهور الخيول هو أسرع وسيلة اتصال يمكننا الحصول عليها.

بالوصول إلى هذه المرحلة، سيصبح من المستحيل دعم سكان الكوكب. إذ لن تعمل أي من الحِيَل الذكية التي كنا نستخدمها لزراعة المزيد من الطعام ونقل البضائع عبر المحيطات. وسيكون علينا أن نرتدَّ إلى مرحلة السفن الشراعية. وستتفشى الأمراض مع تضوُّر المليارات من البشر جوعًا حتى الموت. وستحل نهاية العالم، ونصبح في انتظار معركة هرمجدون؛ لأن القِلَّة الناجين سيتناحرون من أجل الأشياء القليلة التي تبقَّت من عالمنا.

قد تشعر أن هذا السيناريو يتَّسم بالمبالغة. أزعم أن الشيء الوحيد الذي بالغت فيه هو تصوير الرياضيات بأنها مادة صالحة للأكل. نحن نعتمد بالفعل على الرياضيات في كل شيء تقريبًا يحافظ على استمرارية كوكبنا. إن الحياة اليومية للأشخاص الذين يعتقدون

أن الرياضيات عديمة الفائدة تعتمد بشكل غير مُدرَك على أنشطة أولئك الذين يعرفون أن هذا غير صحيح. إنه ليس خطأهم على الإطلاق؛ فتلك الأنشطة تحدث خلف الكواليس، حيث من غير المحتمل أن يصبح أحد على دراية بها باستثناء المتخصصين.

أنا لا أقول إننا «دون الرياضيات، كنا سنظل نعيش في الكهوف»؛ لأنني متأكد من أننا، دون الرياضيات، كنا سنجد طرقًا أخرى للتقدم. وأنا لا أدعي على الإطلاق أنه ينبغي منح الرياضيات «وحدها» الفضل في التقدم الذي حقَّقناه. فالرياضيات تكون في ذروة منفعتها عندما تنضم إلى كل الأشياء الأخرى المتاحة للبشرية كي تحل المشكلات التي تواجهها وتحقق الأهداف التي تتصورها. لكننا وصلنا لما نحن فيه من تقدم هائل؛ لأن الرياضيات، إلى جانب كل تلك الأشياء الأخرى، هي التي أوصلتنا إليه. لقد ضمنًّا، في الوقت الحاضر، الرياضيات بعمق في البِنى التكنولوجية والاجتماعية الخاصة بنا لدرجة أننا سنصبح في وضعٍ صعب للغاية من دونها.

في الفصل الافتتاحي، ذكرتُ ست ميزات للرياضيات: الواقعية، والجمال، والعمومية، وقابلية التطبيق المتعدِّد، والوحدة، والتنوُّع. إنها معًا، حسبما زعمتُ، تؤدي إلى الفائدة الكبيرة للرياضيات. والآن، بعد أن قرأت الفصول السابقة، كيف تقيم معقولية هذه الملاحظات؟

إن العديد من الأفكار الرياضية التي تطرقنا إليها نشأت في العالم الحقيقي. الأعداد، والمعادلات التفاضلية، ومسألة البائع المتجوِّل، ونظرية الرسم البياني، وتحويل فورييه، ونموذج إيزينج. فالرياضيات تأخذ الإلهام من الطبيعة، وتتطوَّر.

ونشأت جوانب أخرى من المجال إلى حد كبير بسبب الحِسِّ الجمالي المجرد لعلماء الرياضيات. فالأعداد المركبة ابتُكرت لأنه من السيئ أن يكون لبعض الأعداد جذران تربيعيان ولا يكون لأخرى أي جذور تربيعية. وظهر الحساب المقياسي، والمنحنيات الإهليلجية، وأجزاء أخرى من نظرية الأعداد، لأن الناس استمتعوا بالبحث عن أنماط عددية. وظهر تحويل رادون، لأنه سؤال مثير للاهتمام في الهندسة. وهناك أيضًا الطوبولوجيا، التي ظلَّت دون تطبيقات كثيرة في الواقع لمدة قرن، ولكنها أساسية بالنسبة للصرح الرياضي؛ لأن جوهرها هو الاستمرارية، وهو أمر أساسي.

إن الرغبة في التعميم واضحة في كل مكان. فلم يكتفِ أويلر بحل اللغز الخاص بجسور كونيجسبرج؛ بل حل كل الألغاز التي من النوع نفسه وأنشأ مجالًا جديدًا من الرياضيات تمَّثل في نظرية الرسم البياني. وقد أدَّت الشفرات المبنيَّة على الحساب المقياسي

إلى مسائل التعقيد الحسابي وما إذا كانت $P = NP$. كما ألهمت الأعداد المركبة هاميلتون كي يتوصل إلى الكواترنيونات. وعُمِّم التحليل إلى التحليل الدالِّي، مع استبدال فراغات الدوال غير منتهية الأبعاد بالفراغات المنتهية الأبعاد، والداليات والمؤثرات بالدوال. وابتكر علماء الرياضيات فراغات هيلبرت في نظرية الكم قبل وقت طويل من أن يجد الفيزيائيون فائدة لها. وبدأت الطوبولوجيا بألعاب مثل شرائط موبيوس وانطلقت لتصبح واحدة من أعمق مجالات الفكر البشري وأكثرها تجريدًا. والآن بدأت تؤتي ثمارها في الحياة اليومية، أيضًا.

إن العديد من الأساليب التي صادفناها قابلة للتطبيق المتعدد، لذا تُستخدم في كل المجالات، بغض النظر عن المجال الذي نشأت فيه. حيث تظهر نظرية الرسم البياني في المشاكل الطبية ذات الصلة بزرع الكُلَى، وفي مسألة البائع المتجوِّل، وفي الشفرات الكمية (الرسوم البيانية الموسَّعة) التي يمكن أن تحمي بياناتنا من هجمات أجهزة الكمبيوتر الكمية، وفي قدرة المِلاحة بالأقمار الصناعية على اختيار مسار فعَّال. لقد صُمِّم تحويل فورييه في الأصل لدراسة تدفُّق الحرارة، لكن المفاهيم المشابهة تتضمن تحويل رادون، المستخدم في أجهزة الأشعة الطبية، وتحويل جيب التمام المتقطِّع المستخدَم في نظام ضغط الصور باستخدام تنسيق JPEG، والمُوَيجات التي يستخدمها مكتب التحقيقات الفيدرالي لتخزين بصمات الأصابع بكفاءة.

أما وحدة الرياضيات، فهي أيضًا خيط يمتد عبر كل قصصي هنا. حيث تؤدي مبادئ نظرية الرسم البياني إلى ظهور مجال الطوبولوجيا. وتظهر الأعداد المركبة في مسائل متعلقة بنظرية الأعداد. ويُلهم الحساب المقياسي بناء مجموعات التماثل. وتجمع المِلاحة بالأقمار الصناعية بين خمسة فروع متمايزة على الأقل من الرياضيات في تطبيق واحد؛ بدءًا من الأعداد شِبه العشوائية إلى النسبية. وتساعد الديناميكا في وضع الأقمار الصناعية في مداراتها وتقترح طريقة جديدة لمراقبة الجودة للسلك الزُّنبُركي.

ماذا عن التنوع؟ تعرض فصول هذا الكتاب، بين طيَّاتها، عشرات المجالات المختلفة للرياضيات، التي عادة ما تكون مُجمَّعة. وهي تتراوح من المجالات العددية إلى المجالات الهندسية، ومن الأعداد غير النسبية إلى قِنِّينات كلاين، ومن تقسيم الكعكة العادل إلى النماذج المناخية. كما تتضافر الاحتمالية (سلاسل ماركوف)، والرسوم البيانية، وأبحاث العمليات (أساليب مونت كارلو) لزيادة فُرص المرضى في الحصول على عملية زرع كُلًى.

بالنسبة إلى المنفعة، فإن نطاق التطبيقات أكثر تنوُّعًا، من أعمال التحريك في الأفلام إلى الطب، ومن تصنيع الزُّنبُرك إلى التصوير الفوتوغرافي، ومن التجارة عبر الإنترنت إلى

توجيه الطائرات، ومن الهواتف المحمولة إلى أجهزة الاستشعار الأمنية. إن الرياضيات في كل مكان. ولقد عرضتُ لك فقط جزءًا صغيرًا مما هو موجود على أرض الواقع، فتلك التطبيقات تُدير العالم، دون أن تكون مرئية أو معلَنة. ليست لديَّ فكرة عما يكون معظمها. فالعديد من أفضل الأفكار هي أسرار تجارية، على أي حال.

عندما تتأزَّم الأمور، تتضح أهمية أن يمتلك أكبر عدد ممكن منَّا فَهمًا شاملًا للرياضيات قدر الإمكان. ليس فقط لمصلحتنا الشخصية؛ أقر بأنه، بالنسبة لمعظمنا، ليس الكثير مما نتعلمه عن الرياضيات مفيدًا على نحو مباشر. لكن هذا صحيح فيما يتعلق بكل شيء. لقد درستُ التاريخ في المدرسة، ومن المؤكد أنه أعطاني فكرة أفضل عن الثقافة التي أعيش فيها، بالإضافة إلى تلقيني دعاية استعمارية تبدو الآن متحيِّزة على نحوٍ متزايد. لكنني لا أستخدم التاريخ في عملي أو حياتي. إنني أجدُه ممتعًا (بدرجة أكبر، مع تقدُّمي في السن)، ويسعدني أن هناك مؤرخين يستخدمونه، ولن أجرؤ على التوصية بعدم تدريسه. لكنَّ هناك دليلًا واضحًا على أن الرياضيات «ضرورية» من أجل طريقة الحياة في وقتنا الحاضر. علاوةً على ذلك، من الصعب جدًّا التنبؤ بما قد يكون مفيدًا لنا منها غدًا. فلم يكن سبنسر، وهو الحِرفي الذي ركَّب بلاط الحمام الخاص بي، يظن أن العدد π يمكن الاستفادة منه، حتى احتاج إليه.

إن الرياضيات، عندما يُنظَر إليها على نحو صحيح على أنها المجال الثري والمبدع الذي هي عليه بالفعل، وليس على الصورة الدونية التي يراها الكثيرون عليها، تُعَد واحدة من أعظم إنجازات البشرية. ليس فقط في نطاق الفكر، ولكن في نطاق التطبيق العملي. ومع ذلك فإننا نخفيها في الظلام. وقد حان الوقت لإخراجها إلى النور، قبل أن يحاول النُّظراء الواقعيون للماثيفوريين، الذين ابتكرهم خيالي، أن يسلبوها منا.

صحيح أن الثعلب يعرف أشياء كثيرة، لكن علماء الرياضيات يعرفون «شيئًا واحدًا كبيرًا». إنه يُسمى الرياضيات، وهو يعيد صياغة عالمنا.

الهوامش

الفصل الأول: الفعالية اللامعقولة

(1) In 2012 the accountancy company Deloitte carried out a survey: *Measuring the Economic Benefits of Mathematical Science Research in the UK.* At that time, 2–8 million people were employed in mathematical science occupations: pure and applied mathematics, statistics, and computer science. The mathematical sciences contributed £208 billion (gross value added) to the UK economy in that year – just under £250 billion in 2020 money, around $300 billion. Those 2–8 million people made up 10% of the British workforce, and contributed 16% of the economy. The largest sectors were banking, industrial research and development, computer services, aerospace, pharmaceuticals, architecture,and construction. The report's examples include smartphones, weather forecasting, healthcare, movie special effects, improving athletic performance, national security, managing epidemics, Internet data security, and making manufacturing processes more efficient.

(2) https://www.maths.ed.ac.uk/~v1ranick/papers/wigner.pdf

(3) The formula is

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

where x is the value of the random variable, μ is the mean, and σ is the standard deviation.

(4) Vito Volterra was a mathematician and physicist. In 1926 his daughter was courting Umberto D'Ancona, a marine biologist, and later they married. D'Ancona had discovered that during the First World War, the proportion of predatory fish (sharks, rays, swordfish) that fishermen were catching increased, even though they were doing less fishing overall. Volterra wrote down a simple calculus-based model for how the populations of predators and prey change over time, which showed that the system goes round and round in a cycle of predator explosions and prey crashes. Crucially, *on average* the number of predators increases, proportionately, more than the number of prey.

(5) No doubt Newton used physical intuition as well, and historians tell us that he probably pinched the idea from Robert Hooke, but there's no point in being a one-trick pony.

الفصل الثاني: كيف يختار السياسيون ناخبيهم؟

(1) www.theguardian.com/commentisfree/2014/oct/09/virginia-gerrymandering-voting-rights-act-black-voters

(2) Time wasn't the only issue. At the Constitutional Convention of 1787, which led to the Electoral College system, though not by that name, James Wilson, James Madison, and others felt that a popular vote would be best. However, there were practical problems about who would be allowed to vote, with big differences of opinion between Northern and Southern states.

(3) In 1927 E. P. Cox used the same quantity in palaeontology to assess how round sand grains are, which helps distinguish windblown sand from waterborne sand, providing evidence for environmental conditions

in prehistoric times. See E. P. Cox. ‘A method of assigning numerical and percentage values to the degree of roundness of sand grains,’ *Journal of Paleontology* 1 (1927) 179–183. In 1966 Joseph Schwartzberg proposed using the ratio of the perimeter of a district to the circumference of the circle of the same area. This is the reciprocal of the square root of the Polsby–Popper score, so it ranks districts in the same way, though with different numbers. See J. E. Schwartzberg, ‘Reapportionment, gerrymanders, and the notion of “compactness”,’ *Minnesota Law Review* 50 (1966) 443–452.

(4) By enclosing a hill, a curved surface, she crammed even more area into her circle.

(5) V. Blåsjö, ‘The isoperimetric problem,’ *American Mathematical Monthly* 112 (2005) 526–566.

(6) For a circle of radius r,

$$\text{circumference}(=\text{perimeter}) = 2\pi r$$

$$\text{area} = \pi r^2$$

$$\text{perimeter}^2 = (2\pi r)^2 = 4\pi^2 r^2 = 4\pi\left(\pi r^2\right) = 4\pi \times \text{area}$$

(7) N. Stephanopoulos and E. McGhee, ‘Partisan gerrymandering and the efficiency gap,’ *University of Chicago Law Review* 82 (2015) 831–900.

(8) M. Bernstein and M. Duchin, ‘A formula goes to court: Partisan gerrymandering and the efficiency gap,’ *Notices of the American Mathematical Society 64* (2017) 1020–1024.

(9) J. T. Barton, ‘Improving the efficiency gap,’ *Math Horizons* 26.1 (2018) 18–21.

(10) In the early 1960s John Selfridge and John Horton Conway independently found an envy-free method of cake division for three players:

(1) Alice cuts the cake into three pieces that she considers of equal value.

(2) Bob either passes, if he thinks two or more pieces are tied for largest, or trims what he considers to be the largest piece to create such a tie. Trimmings are called 'leftovers' and set aside.

(3) Charlie, Bob, and Alice, in that order, choose a piece that they think is largest or tied largest. If Bob didn't pass in step 2 he must choose the trimmed piece, unless Charlie chose it first.

(4) If Bob passed at step 2 there are no leftovers and we're done. If not, either Bob or Charlie took the trimmed piece. Call this person the 'non-cutter' and the other the 'cutter'. The cutter divides the leftovers into three pieces that he considers equal.

(5) Players choose one of these pieces in the order non-cutter, Alice, cutter. No player has any reason to envy what another player receives: if they do, they got their tactics wrong and should have chosen differently. For a proof, see: en.wikipedia.org/wiki/Selfridge-Conway_procedure.

(11) S. J. Brams and A. D. Taylor, *The Win-Win Solution: Guaranteeing Fair Shares to Everybody,* Norton, New York (1999).

(12) Z. Landau, O. Reid, and I. Yershov, 'A fair division solution to the problem of redistricting,' *Social Choice and Welfare* 32 (2009) 479–492.

(13) B. Alexeev and D. G. Mixon, 'An impossibility theorem for gerrymandering,' *American Mathematical Monthly* 125 (2018) 878–884.

الفصل الثالث: دع الحمامة تقود الحافلة!

(1) B. Gibson, M. Wilkinson, and D. Kelly, 'Let the pigeon drive the bus: pigeons can plan future routes in a room,' *Animal Cognition* (2012) 379–391.

(2) My favourite example is a politician who made a huge fuss about money being wasted on what he called 'lie theory'—pronouncing 'lie' as in 'untruth', which is what he thought it was about. Not so. Sophus Lie (pronounced 'lee') was a Norwegian mathematician, whose work on continuous groups of symmetries (Lie groups) and associated algebras (guess what) is fundamental to large parts of mathematics and even more so to physics. The politician's misconception was quickly pointed out … and he carried on *exactly as before*.

(3) For technical reasons my remark about jigsaws doesn't solve the prize problem. If it did, I'd have got there first.

(4) M. R. Garey and D. S. Johnson, *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness,* Freeman, San Francisco (1979).

(5) G. Peano, 'Sur une courbe qui remplit toute une aire plane,' *Mathematische Annalen 36* (1890) 157—160.

(6) Some care needs to be taken because some real numbers don't have unique representations as decimals—for instance 0.500000… = 0.499999…. But that's easy to sort out.

(7) E. Netto, 'Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre,' *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik* 86 (1879) 263—268.

(8) H. Sagan, 'Some reflections on the emergence of space-filling curves: the way it could have happened and should have happened, but did not happen,' *Journal of the Franklin Institute* 328 (1991) 419—430. For an explanation, see: A. Jaffer, 'Peano space-filling curves,' http://people.csail.mit.edu/jaffer/Geometry/PSFC

(9) J. Lawder, 'The application of space-filling curves to the storage and retrieval of multi-dimensional data,' PhD Thesis, Birkbeck College, London (1999).

(10) J. Bartholdi, 'Some combinatorial applications of spacefilling curves,' www2.isye.gatech.edu/~jjb/research/mow/mow.html

(11) H. Hahn, 'Über die allgemeinste ebene Punktmenge, die stetiges Bild einer Strecke ist,' *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung,* 23 (1914) 318–322. H. Hahn, 'Mengentheoretische Charakterisierung der stetigen Kurven,' *Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften, Wien* 123 (1914) 2433–2489. S. Mazurkiewicz, 'O aritmetzacji kontinuów', *Comptes Rendus de la Société Scientifique de Varsovie* 6 (1913) 305–311 and 941–945.

(12) Published in 1998: S. Arora, M. Sudan, R. Motwani, C. Lund, and M. Szegedy, 'Proof verification and the hardness of approximation problems,' *Journal of the Association for Computing Machinery* 45 (1998) 501–555.

(13) L. Babai, 'Transparent proofs and limits to approximation,' in: *First European Congress of Mathematics. Progress in Mathematics* 3 (eds. A. Joseph, F. Mignot, F. Murat, B. Prum, and R. Rentschler) 31–91, Birkhauser, Basel (1994).

(14) C. Szegedy, W. Zaremba, I. Sutskever, J. Bruna, D. Erhan, I. Goodfellow, and R. Fergus, 'Intriguing properties of neural networks,' arXiv:1312.6199 (2013).

(15) A. Shamir, I. Safran, E. Ronen, and O. Dunkelman, 'A simple explanation for the existence of adversarial examples with small Hamming distance,' arXiv:1901.10861v1 [cs.LG] (2019).

الفصل الرابع: مسألة كونيجسبرج وزرع الكُلى

(1) Not to be confused with the graph of a function, which is a curve relating a variable x to the value $f(x)$ of the function. Like the parabola for $f(x) = x^2$.

(2) Thanks to Robin Wilson for gently pointing this out when I got it wrong in one of my books.

(3) Provided you know which region to start from, it's enough just to list the bridge symbols, in the order they're crossed. Consecutive bridges determine a common region, to which they both connect.

(4) This is fairly easy to prove using Euler's characterisation of open tours. The main idea is to break a hypothetical closed tour by cutting out one bridge. Now you have an open tour, and the bridge concerned originally joined the two ends.

(5) The rest of this chapter is based on: D. Manlove, 'Algorithms for kidney donation,' *London Mathematical Society Newsletter* 475 (March 2018) 19–24.

الفصل الخامس: حلِّق آمنًا في الفضاء الإلكتروني

(1) The exact date when Fermat stated his Last Theorem isn't certain, but it's often taken to be 1637.

(2) The same can be said of much 'applied' mathematics too. However, there's a difference: the attitude of the mathematician. Pure mathematics is driven by the internal logic of the subject: not merely monkey curiosity, but a feeling for structure and a sense of where our understanding has significant gaps. Applied mathematics is mainly driven by problems arising in the 'real world', but it's more willing to tolerate unjustified shortcuts and approximations in search of an answer, and the answer may or may not have practical implications. As this chapter illustrates, however, a topic that seems completely useless at some moment in history can suddenly become vital to practical issues when culture or technology changes. Moreover, mathematics is an interconnected whole; even the pure/applied distinction is an artificial one. A theorem that seems useless in its own right may inspire, or even imply, results of great utility.

(3) The answer is:

p = 12,277,385,900,723,407,383,112,254,544,721,901,362,713,421, 995,519

q = 97,117,113,276,287,886,345,399,101,127,363,740,261,423,928, 273,451

I found these two primes by trial and error, and multiplied them together, using a symbolic algebra system on a computer. This took a few minutes, mostly me changing digits at random until I stumbled across a prime. Then I told the computer to find the factors of the product, and it ran for ages with no result.

(4) If n is a prime power p^k, then $\varphi(n) = p^k - p^{k-1}$. For a product of prime powers, multiply these expressions together for all the different prime powers in the prime factorisation of n. For instance, to find $\varphi(675)$ write $675 = 3^3 5^2$. Then

$$\varphi(675) = \left(3^3 - 3^2\right)\left(5^2 - 5\right) = (18)(20) = 360.$$

(5) For more detail about the issues involved, see Ian Stewart, *Do Dice Play God?,* Profile, London (2019), Chapters 15 and 16.

(6) L. M. K. Vandersypen, M. Steffen, G. Breyta, C. S. Yannoni, M. H. Sherwood, and I. L. Chuang, ‘Experimental realization of Shor’s quantum factoring algorithm using nuclear magnetic resonance,’ *Nature* 414 (2001) 883–887.

(7) F. Arute and others, ‘Quantum supremacy using a programmable superconducting processor,’ *Nature* 574 (2019) 505–510.

(8) J. Proos and C. Zalka, ‘Shor’s discrete logarithm quantum algorithm for elliptic curves,’ *Quantum Information and Computation* 3 (2003).

(9) M. Roetteler, M. Naehrig, K. Svore, and K. Lauter, ‘Quantum resource estimates for computing elliptic curve discrete logarithms,’ in: *ASIACRYPT 2017: Advances in Cryptology,* Springer, New York (2017), 214–270.

الفصل السادس: مستوى الأعداد

(1) For instance, −25 has a square root 5i, because

$$(5i)^2 = 5i.5i = 5.5.i.i = 25i^2 = 25(-1) = -25$$

In fact, it has a second square root, −5i, for similar reasons.

(2) Algebraists regularise the situation by saying that the square root of zero is zero, with *multiplicity* two. That is, the same value occurs twice, in a meaningful but technical sense. An expression like $x^2 - 4$ has two factors, $x + 2$ times $x - 2$, which respectively give two solutions $x = -2$ and $x = +2$ to the equation $x^2 - 4 = 0$. Similarly, the expression x^2 has two factors, x times x. They just happen to be the same.

(3) For real c the function $z(t) = e^{ct}$ obeys the differential equation $dz/dt = cz$, with initial condition $z(0) = 1$. If we define the exponential function for complex c so that the same equation holds, which is sensible, and set $c = i$, then $dz/dt = iz$. Since multiplying by i rotates complex numbers through a right angle, the tangent to $z(t)$ as z varies is at right angles to $z(t)$, so the point $z(t)$ describes a circle of radius 1 centred at the origin. It rotates round this circle at a constant speed of one radian per unit of time, so at time t its position is at angle t radians. By trigonometry, this point is $\cos t + i \sin t$.

(4) More precisely, there has to be an 'inner product', which determines distances and angles.

الفصل السابع: أبي، هل يمكنك ضرب الثلاثيات؟

(1) The fastest supercomputer in 1988 was the Cray Y-MP, costing $20 million (over $50 million in today's money). It would struggle to run a Windows operating system.

(2) K. Shoemake, ‘Animating rotation with quaternion curves,’ *Computer Graphics* 19 (1985) 245–254.

(3) L. Euler, ‘Decouverte d’un nouveau principe de mecanique’ (1752), *Opera Omnia, Series Secunda* 5, Orel Fusili Turici, Lausanne (1957), 81–108.

(4) The half-angle property is important in quantum mechanics, where one formulation of quantum spin is based on quaternions. If the wave function of a particle of the kind known as a fermion is rotated through 360°, its spin reverses. (This is distinct from rotating the particle itself.) The wave function must rotate through 720° to return the spin to its original value. The unit quaternions form a ‘double cover’ of the rotations.

(5) C. Brandt, C. von Tycowicz, and K. Hildebrandt, ‘Geometric flows of curves in shape space for processing motion of deformable objects,’ *Computer Graphics Forum 35* (2016) 295–305.

(6) www.syfy.com/syfywire/it-took-more-cgi-than-you-think-to-bring-carrie-fisher-into-the-rise-of-skywalker

الفصل الثامن: الزُّنبُركات

(1) T. Takagi and M. Sugeno, ‘Fuzzy identification of systems and its application to modeling and control,’ *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics* 15 (1985) 116–132.

الفصل العاشر: ابتسم، من فضلك!

(1) This is JFIF encoding, used for the web. Exif coding, for cameras, also includes ‘metadata’ describing the camera settings, such as date, time, and exposure.

(2) A. Jain and S. Pankanti, 'Automated fingerprint identification and imaging systems,' in: *Advances in Fingerprint Technology* (eds. C. Lee and R. E. Gaensslen), CRC Press, (2001) 275–326.

الفصل الحادي عشر: هل اقتربنا من الوصول إلى هناك؟

(1) N. Ashby, 'Relativity in the Global Positioning System,' *Living Reviews in Relativity 6* (2003) 1; doi: 10.12942/lrr-2003-1.

(2) More precisely, $Z = \sum \exp(-\beta H)$ where the sum is over all configurations of spin variables.

الفصل الثاني عشر: إيزينج وذوبان ثلوج القطب الشمالي

(1) Setting $\beta = 1/k_{\mathrm{B}}$, where k_{B} is Boltzmann's constant, the formula is:

$$g(T,\ H) = -\frac{1}{\beta} \log \left[\mathrm{e}^{\beta J} \cosh(\beta H) + \sqrt{\mathrm{e}^{\beta J} \cosh^{2}(\beta H) - 2 \sinh 2\beta J} \right]$$

(2) The formula is:

$$\frac{\sin h(\beta H)}{\sqrt{\sinh^{2}(\beta H) + \exp(-4\beta J)}}$$

where H is the strength of the external field and J is the strength of the interactions between spins. In the absence of an external field $H = 0$, so $\sinh(\beta H) = 0$ so the whole fraction is 0.

(3) Y.-P. Ma, I. Sudakov, C. Strong, and K. M. Golden, 'Ising model for melt ponds on Arctic sea ice,' *New Journal of Physics* 21 (2019) 063029.

الفصل الثالث عشر: اتصل بعالم الطوبولوجيا!

(1) S. Tanaka, 'Topological analysis of point singularities in stimulus preference maps of the primary visual cortex,' *Proceedings of the Royal Society of London B* 261 (1995) 81–88.

(2) 'Lobster telescope has an eye for X-rays,' https://www.science dailycom/releases/2006/04/060404194138.htm

(3) Technically, the curve is the *image,* under a map from a disc to the sphere, of the boundary of the disc. The curve can cross itself and the disc can get scrunched up.

(4) J. J. Berwald, M. Gidea, and M. Vejdemo-Johansson, 'Automatic recognition and tagging of topologically different regimes in dynamical systems,' *Discontinuity, Nonlinearity, and Complexity* (2014) 413–426.

(5) F. A. Khasawneh and E. Munch, 'Chatter detection in turning using persistent homology,' *Mechanical Systems and Signal Processing 70* (2016) 527–541.

(6) C. J. Tralie and J. A. Perea, '(Quasi) periodicity quantification in video data, using topology,' *SIAM Journal on Imaging Science* 11 (2018) 1049–1077.

(7) S. Emrani, T. Gentimis, and H. Krim, 'Persistent homology of delay embeddings and its application to wheeze detection,' *IEEE Signal Processing Letters 21* (2014) 459–463.

قائمة الصور

(4–7) Tommy Muggleton (Redrawn).

(9–5) jen Beatty, 'The Radon Transform and the Mathematics of Medical Imaging' (2012), *Honors Theses*, Paper 646. https://digitalcommons.colby.edu/honorstheses/646.

(11–1) Wikipedia.

(12–2) Yi–Ping Ma.

(13–2) G. G. Blasdel, 'Orientation selectivity, preference, and continuity in monkey striate cortex,' *Journal of Neuroscience* 12 (1992) 3139–3161.


هنداوي